追加練習問題

第１講　２次方程式・２次関数(1)

実数 a に対し，次の２つの２次関数を考える．

$$f(x)=x^2+2ax+5(a+2),\ \ g(x)=-x^2+6x+(4a-1)$$

(1)　すべての実数 x に対して $g(x)<f(x)$ が成り立つための必要十分条件は

$\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}<a<\boxed{エ}+\sqrt{\boxed{オカ}}$ である．

(2)　すべての実数 x に対して，$g(x)\leqq k\leqq f(x)$ ……(＊)

これを満たす実数の定数 k が存在するような a の値の範囲は $\boxed{キク}\leqq a\leqq\boxed{ケ}$ である．

ここで，(＊) を満たす実数 k がただ１つであるとき，その k の値は $\boxed{コ}$ または $\boxed{サシ}$ である．

第２講　２次方程式・２次関数(2)

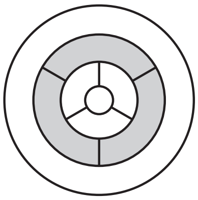
a を実数の定数とし，x の２次方程式 $3x^2+2(a+1)x-(a^2+2)=0$　……(＊) を考える．

(1)　(＊) の実数解 x のとり得る値の範囲は，$x \leqq$ [アイ]，$\dfrac{[ウ]}{[エ]} \leqq x$ である．

(2)　a が正の実数のみをとるとき，(＊) の実数解 x のとり得る値の範囲は

$$x < \frac{[オカ] - \sqrt{[キ]}}{[ク]},\quad \frac{[ケ]}{[コ]} \leqq x \text{ である．}$$

第３講　場合の数・確率(1)



右図に示す８つの領域に分かれた円を，異なる８色を用いて塗り分ける方法を考える．その際，各領域には１つの色を塗るものとし，円を120°の倍数の角度で回転させて一致する塗り方はすべて同じものとみなす．

まず，影のついた３つの領域を異なる３色で塗り分ける方法は **アイウ** 通り，その１つの塗り方に対して，残り５つの領域を残りの５色で塗り分ける方法は **エオカ** 通りある．

よって，異なる８色を用いて塗り分ける方法は **キクケコサ** 通りある．

第５講　場合の数・確率(3)

1個のさいころを4回投げて，出た目を順に a，b，c，d とする．

(1)　$a=b$ かつ $c=d$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である．

(2)　$a=b$ または $c=d$ となる確率は $\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カキ}}$ である．

(3)　$ab=cd$ となる確率は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コサシ}}$ である．

第６講　場合の数・確率(4)

A，B の 2 チームが試合をくり返し行い，先に 3 勝したチームを優勝とする．1 回の試合で A チームが勝つ確率は $\dfrac{2}{3}$，B チームが勝つ確率は $\dfrac{1}{3}$ で，引き分けはないものとする．

(1)　優勝が決まるまでに B チームが少なくとも 1 勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である．

(2)　4 試合目で優勝が決まる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である．

(3)　1 試合目で A チームが勝ち，A チームが優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である．

第７講　三角比・平面図形

(1)　OA＝$a-2$，OB＝$4-\dfrac{a}{3}$，$\angle$O＝120° であるような三角形 OAB について考える．

三角形 OAB の面積 S を a を用いて表すと

$S=-\dfrac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イウ}}\left(a^2-\boxed{エオ}\,a+\boxed{カキ}\right)$ である．

OA＝$\boxed{ク}$，OB＝$\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ のとき，S は最大値 $\dfrac{\boxed{サシ}\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セソ}}$ をとる．

(2)　△ABC において AB＝4，BC＝2，CA＝3 とし，辺 AB 上に点 P をとり，AP＝x とおく．さらに，辺 AC 上に点 Q を AQ＝$\dfrac{6}{x}$ となるようにとる．このとき，線分 PQ の長さの 2 乗を x を用いて表すと，$\mathrm{PQ}^2=x^2+\dfrac{\boxed{タチ}}{x^2}-\dfrac{\boxed{ツテ}}{2}$ であり，PQ の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ト}}}{2}$ である．ただし，$x>2$ とする．

第８講　三角関数(1)

$0 \leqq \theta < \pi$ とする．このとき，

$$f(\theta)=\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta=\boxed{\text{ア}}\sin\left(\boxed{\text{イ}}\theta+\frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$$

が成り立つ．$f(\theta)$ の最小値は $\boxed{\text{エオ}}$ であり，そのときの θ の値は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ である．

第９講　三角関数(2)

関数 $y=\sin\theta\cos\theta-\sin\theta+\cos\theta$ について考える．

(1)　$t=\cos\theta-\sin\theta$ とおくとき，y を t の式で表すと，$y=-\dfrac{1}{\boxed{ア}}t^2+t+\dfrac{1}{\boxed{イ}}$ となる．

(2)　θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，t の動く範囲は，$-\sqrt{\boxed{ウ}}\leqq t\leqq\boxed{エ}$ となる．

(3)　θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，y は，$\theta=\boxed{オ}$ のとき最大値 $\boxed{カ}$，$\theta=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{\boxed{ケ}}-\sqrt{\boxed{コ}}$ をとる．

第10講　指数関数・対数関数

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とする．

(1)　3^{20} の一の位の数字は［ア］である．

(2)　n を自然数とし，3^n が21桁で一の位の数が7である．

このとき，$n=$［イウ］である．

また，この n に対して，$\log_{10}3^n=$［エオ］.［カキクケ］であるから，3^n の最高位の数字は［コ］である．

第12講　図形と方程式(2)

方程式 $x^2+y^2+2kx-4ky+10k-20=0$ の表す円 C を考える．ただし，k は実数とする．

(1)　円 C は k がどのような値であっても定点を通る．その定点の座標は

$\left(-\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}\sqrt{3},\ \boxed{\text{ウ}}+\sqrt{3}\right)$，$\left(-\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\sqrt{3},\ \boxed{\text{ウ}}-\sqrt{3}\right)$

(2)　円 C の面積の最小値は $\boxed{\text{エオ}}\pi$ であり，このときの k の値は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(3)　円 C と直線 $y=x-2$ が共有点を1個だけもつのは，$k=\boxed{\text{キク}}\pm2\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ のときである．

第13講　図形と方程式(3)

座標平面上に2点 A$(-1,\ 0)$，B$(3,\ 2)$ をとる．m を実数とし，直線 $y=mx$ を l とする．

(1)　l 上の点Pの座標を $(t,\ mt)$ とするとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を，t，m を用いて表すと，

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=\boxed{\text{ア}}\left(m^2+\boxed{\text{イ}}\right)t^2-\boxed{\text{ウ}}(m+1)t+\boxed{\text{エオ}}$$ となる．

(2)　点Pが l 上を動くとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を最小にするPの座標を $(X,\ Y)$ とおく．X，Y を m で表すと，$X=\dfrac{m+\boxed{\text{カ}}}{m^2+\boxed{\text{キ}}}$，$Y=\dfrac{m\left(m+\boxed{\text{ク}}\right)}{m^2+\boxed{\text{キ}}}$ となる．

(3)　m が実数全体を動くとき，点P$(X,\ Y)$ はある曲線上を動く．その曲線は，

円 $\left(x-\dfrac{1}{\boxed{\text{ケ}}}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{\boxed{\text{コ}}}\right)^2=\dfrac{1}{\boxed{\text{サ}}}$ である．ただし，点 $(0,\ 1)$ は除く．

第 14 講　図形と方程式(4)

座標平面上の 2 つの直線 l_1，l_2 と円 C を，$l_1：3x-y-1=0$，$l_2：x+3y-3=0$，
$C：x^2+y^2-4x-2y+3=0$ と定めるとき，次の問いに答えよ．

(1)　直線 l_1 と直線 l_2 の交点の座標は，$\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\right)$ である．

(2)　円 C と直線 l_1 の共有点の座標は，$\left(\boxed{エ},\ \boxed{オ}\right)$，$\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\right)$ である．

(3)　円 C と直線 l_2 の共有点の座標は，$\left(\boxed{カ},\ \boxed{キ}\right)$，$\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\right)$ である．

(4)　連立不等式 $\begin{cases}(3x-y-1)(x+3y-3)\leqq 0\\ x^2+y^2-4x-2y+3\leqq 0\end{cases}$ の表す領域の面積は，$\pi-\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．

第 15 講　微分法・積分法(1)

関数 $y=27^x+27^{-x}-6(9^x+9^{-x})+12(3^x+3^{-x})-13$ について，$t=3^x+3^{-x}$ とおく．

(1)　t は，$t \geqq$ [ア] を満たす．この等号が成り立つのは $x=$ [イ] のときである．

(2)　y は t を用いて $y=t^3-$ [ウ] t^2+ [エ] $t-$ [オ] と表される．

したがって，y の最小値は [カキ] である．

(3)　$y=0$ となるような異なる実数 t は全部で [ク] 個あり，このそれぞれの t に対して，異なる [ケ] 個の実数 x が定まる．

第16講　微分法・積分法(2)

曲線 $y=x^3-2x$ を C とする.

(1)　曲線 C 上の点 $(t,\ t^3-2t)$ における C の接線の方程式は

$y=\left(\boxed{\text{ア}}\,t^2-\boxed{\text{イ}}\right)x-\boxed{\text{ウ}}\,t^3$ である.

(2)　a，b を定数とし，$a \fallingdotseq 0$ とする.

点 $(a,\ b)$ から曲線 C に接線が3本引けるときの a，b の条件を求める.

まず，a，b および(1)の t を用いると，求める条件は，t の3次方程式

$$\boxed{\text{エ}}\,t^3-\boxed{\text{オ}}\,at^2+\boxed{\text{カ}}\,a+b=0$$

が異なる $\boxed{\text{キ}}$ 個の実数解をもつことである.

したがって，a，b の条件は $\boxed{\text{ク}}$ である.

$\boxed{\text{ク}}$ は，次の①～④のうちから適するものを選べ.

①　$(2a+b)(a^3-2a-b)>0$　　②　$(2a+b)(a^3-2a-b)<0$

③　$(2a-b)(a^3+2a-b)>0$　　④　$(2a-b)(a^3+2a-b)<0$

第17講　微分法・積分法(3)

関数 $f(t)=\int_0^1|(x-1)(x-t)|\,dx$ $(0\leqq t\leqq 1)$ について，

(1) $f(t)$ を t の関数として表すと，$f(t)=-\dfrac{1}{\boxed{ア}}t^3+t^2-\dfrac{1}{\boxed{イ}}t+\dfrac{1}{\boxed{ウ}}$ である．

(2) $f'(t)=0$ $(0<t<1)$ となる t の値は $t=\dfrac{\boxed{エ}-\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ である．

(3) $f(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ の最小値は $\dfrac{\boxed{キ}-\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ である．

第18講　微分法・積分法(4)

曲線 $y=x^2(x-1)$ を C とし，C 上の点 $(t,\ t^2(t-1))$ における接線を l とする．

(1)　C と l が，接点以外に共有点をもつのは $t\neq\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ のときであり，このとき，接点以外の共有点の x 座標は $\boxed{\text{ウ}}-\boxed{\text{エ}}\,t$ である．

(2)　$t>\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ のとき，C と l で囲まれた図形の面積が $\dfrac{4}{3}$ になるのは，$t=\boxed{\text{オ}}$ のときである．

第19講　ベクトル(1)

$\vec{a}$, $\vec{b}$ を単位ベクトルとし，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=-\vec{a}+2\vec{b}$ とおく．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0<\theta<\pi)$ とし，$x=\cos\theta$ とおく．

(1)　$\vec{c}$ と $\vec{d}$ の大きさは，$|\vec{c}|=\sqrt{\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{ア}}x}$，$|\vec{d}|=\sqrt{\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}}x}$ である．

(2)　内積 $\vec{c}\cdot\vec{d}$ を x を用いて表すと，$\vec{c}\cdot\vec{d}=\boxed{\text{エ}}+x$ となる．

(3)　$\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角も θ に等しいとき，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ となる．

第20講　ベクトル(2)

平面上に三角形OABがある．辺OAを1：2に内分する点をC，辺OBを2：1に内分する点をDとし，線分ADとBCの交点をEとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とする．

(1)　$\overrightarrow{OE}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\vec{b}$である．

(2)　線分OEの中点をP，辺ABの中点をQとし，線分CDを$k:(1-k)$（kは実数）に内分する点をRとする．このとき，

$$\overrightarrow{RQ}=\frac{\boxed{エ}+\boxed{オ}k}{\boxed{カ}}\vec{a}+\frac{\boxed{キ}-\boxed{ク}k}{\boxed{カ}}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\boxed{ケ}}{14}\left(\boxed{コ}\vec{a}+\vec{b}\right)\text{である．}$$

また，3点P，Q，Rが一直線上にあるときのkの値は，$k=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$である．

第 22 講　ベクトル(4)

O を原点とする座標空間に 3 点 A(2, 1, 2), B(1, 0, 3), C(0, 1, 1) がある．実数 t を用いて，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ で表される点 P は，$\left(\boxed{\text{ア}}-t,\ \boxed{\text{イ}}-t,\ \boxed{\text{ウ}}+t\right)$ と表され，点 P が xy 平面上にあるとき，$t=\boxed{\text{エオ}}$ である．また，$\overrightarrow{CP}$ と $\overrightarrow{AB}$ が垂直であるとき，$t=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

第 23 講　数列(1)

初項が 5 である等差数列 $\{a_n\}$ と，初項が 2 である等比数列 $\{b_n\}$ がある $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$．数列 $\{c_n\}$ が，$c_n=a_n-b_n$，$c_2=5$，$c_3=-1$，$c_4=-31$ で定められるとき，次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の公差は［ア］，数列 $\{b_n\}$ の公比は［イ］である．

(2)　数列 $\{c_n\}$ の一般項は，$c_n=$［ウ］$n-1-$［エ］・［オ］$^{n-1}$ である．

(3)　数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和は $S_n=$［カ］n^2+［キ］$n+1-$［ク］^{n} となる．

第24講　数列(2)

$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$，$T=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}$ とする．

(1)　$S=\boxed{\text{ア}}-\frac{n+\boxed{\text{イ}}}{2^n}$ である．

(2)　T は S を用いて，$T=\boxed{\text{ウ}}S-\boxed{\text{エ}}+\frac{\boxed{\text{オ}}-n^2}{2^n}$ と表される．

以上の結果を用いると，$\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot2^{n-k}=\boxed{\text{カ}}\cdot2^n-n^2-\boxed{\text{キ}}n-\boxed{\text{ク}}$ である．

追加練習問題解答

第1講　2次方程式・2次関数(1)

実数 a に対し，次の2つの2次関数を考える．

$$f(x)=x^2+2ax+5(a+2),\quad g(x)=-x^2+6x+(4a-1)$$

(1)　すべての実数 x に対して $g(x)<f(x)$ が成り立つための必要十分条件は

$\boxed{\text{ア}}-\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}<a<\boxed{\text{エ}}+\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

(2)　すべての実数 x に対して，$g(x)\leqq k\leqq f(x)$　……(＊)

これを満たす実数の定数 k が存在するような a の値の範囲は $\boxed{\text{キク}}\leqq a\leqq\boxed{\text{ケ}}$ である．

ここで，(＊)を満たす実数 k がただ1つであるとき，その k の値は $\boxed{\text{コ}}$ または $\boxed{\text{サシ}}$ である．

解答例

(1)　$g(x)<f(x)$ より

$$-x^2+6x+(4a-1)<x^2+2ax+5(a+2)$$
$$2x^2+2(a-3)x+a+11>0$$

これがすべての実数 x に対して成り立つのは

判別式 $\dfrac{D}{4}=(a-3)^2-2(a+11)<0$ のとき．

すなわち　$a^2-8a-13<0$

これを解いて　$\mathbf{4-\sqrt{29}<a<4+\sqrt{29}}$

(2)　$f(x)=(x+a)^2-a^2+5a+10$

$g(x)=-(x-3)^2+4a+8$

(＊)を満たす実数 k が存在するのは

$$[f(x)\text{ の最小値}]\geqq[g(x)\text{ の最大値}]$$

であるときである．ここで

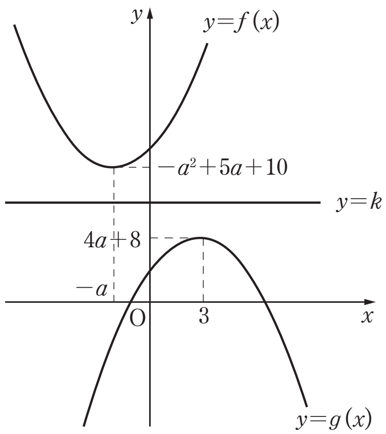
$f(x)$ の最小値は　$-a^2+5a+10$

$g(x)$ の最大値は　$4a+8$

だから　$-a^2+5a+10\geqq 4a+8$

$a^2-a-2\leqq 0$

これを解いて　$\mathbf{-1\leqq a\leqq 2}$



(＊)を満たす実数 k がただ1つであるのは

$$[f(x)\text{ の最小値}]=[g(x)\text{ の最大値}]$$

のときだから　$a=-1,\ 2$

$a=-1$ のとき，$g(x)$ の最大値は　4

$a=2$ のとき，$g(x)$ の最大値は　16

よって，求める k の値は　$\mathbf{k=4,\ 16}$

第２講　２次方程式・２次関数(2)

a を実数の定数とし，x の２次方程式 $3x^2+2(a+1)x-(a^2+2)=0$ ……(＊) を考える．

(1) (＊)の実数解 x のとり得る値の範囲は，$x\leqq$ [アイ]，$\dfrac{[ウ]}{[エ]}\leqq x$ である．

(2) a が正の実数のみをとるとき，(＊)の実数解 x のとり得る値の範囲は

$x<\dfrac{[オカ]-\sqrt{[キ]}}{[ク]}$，$\dfrac{[ケ]}{[コ]}\leqq x$ である．

解答例

(1) (＊)の判別式を D_1 とすると　$\dfrac{D_1}{4}=(a+1)^2+3(a^2+2)>0$

よって，(＊)は a の値にかかわらず異なる２つの実数解をもつ．

次に，(＊)を a について整理すると　$a^2-2xa-(3x^2+2x-2)=0$

この等式を満たす実数 a が存在するから，a の２次方程式とみて，判別式を D_2 とすると

$$\frac{D_2}{4}=x^2+(3x^2+2x-2)\geqq 0$$

$$2x^2+x-1\geqq 0 \qquad (x+1)(2x-1)\geqq 0$$

よって　$x\leqq \mathbf{-1}$，$\mathbf{\dfrac{1}{2}}\leqq x$

(2) $f(a)=a^2-2xa-(3x^2+2x-2)$ とおくと

$$f(a)=(a-x)^2-(4x^2+2x-2)$$

求める x のとり得る値とは，a の２次方程式 $f(a)=0$ が正の実数解をもつときの x の値の範囲である．

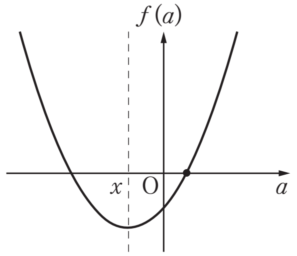
(i) $x<0$ のとき

$$f(0)=-(3x^2+2x-2)<0$$

$$3x^2+2x-2>0$$

これを解いて　$x<\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$，$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}<x$

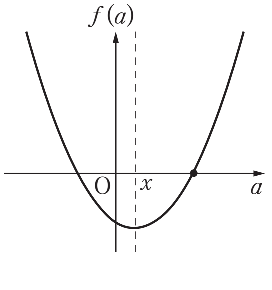
$x<0$ より　$x<\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$



(ii) $x\geqq 0$ のとき

$D_2\geqq 0$ より　$x\leqq -1$，$\dfrac{1}{2}\leqq x$

$x\geqq 0$ より　$\dfrac{1}{2}\leqq x$

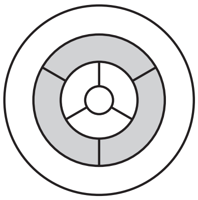


(i)，(ii)より，求める x の値の範囲は

$$x<\mathbf{\frac{-1-\sqrt{7}}{3}},\quad \mathbf{\frac{1}{2}}\leqq x$$

第３講　場合の数・確率(1)

右図に示す８つの領域に分かれた円を，異なる８色を用いて塗り分ける方法を考える．その際，各領域には１つの色を塗るものとし，円を 120° の倍数の角度で回転させて一致する塗り方はすべて同じものとみなす．



まず，影のついた３つの領域を異なる３色で塗り分ける方法は **アイウ** 通り，その１つの塗り方に対して，残り５つの領域を残りの５色で塗り分ける方法は **エオカ** 通りある．

よって，異なる８色を用いて塗り分ける方法は **キクケコサ** 通りある．

解答例

影のついた３つの領域を塗り分ける方法は，８色から３色を選び，その３色についての円順列の数だけあるから

$${}_8C_3 \cdot (3-1)! = 56 \cdot 2 = \mathbf{112}\ (通り)\quad \cdots\cdots ①$$

その１つの塗り方に対して，残り５つの領域を異なる５色で塗り分ける方法は，この５色についての順列の数だけあるから

$${}_5P_5 = 5! = \mathbf{120}\ (通り)\quad \cdots\cdots ②$$

①，②より，異なる８色を用いて塗り分ける方法の総数は

$$112 \times 120 = \mathbf{13440}\ (通り)$$

第５講　場合の数・確率(3)

1 個のさいころを 4 回投げて，出た目を順に a，b，c，d とする．

(1)　$a=b$ かつ $c=d$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である．

(2)　$a=b$ または $c=d$ となる確率は $\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カキ}}$ である．

(3)　$ab=cd$ となる確率は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コサシ}}$ である．

解答例

(1)　$a=b$ となる事象を A，$c=d$ となる事象を B とすると

$$P(A)=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$$

$$P(B)=P(A)=\frac{1}{6}$$

よって　$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(2)　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\mathbf{\frac{11}{36}}$$

(3)　積 ab の値は，右表のようになる．

a＼b	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

積 ab の値を k とし，$ab=k$ となる $(a,\ b)$ の組の個数を調べる．

・$ab=k$ となる $(a,\ b)$ の組が 1 個であるのは
　$k=1$，9，16，25，36 の 5 個．

・2 個であるのは
　$k=2$，3，5，8，10，15，18，20，24，30 の 10 個．

・3 個であるのは
　$k=4$ の 1 個．

・4 個であるのは
　$k=6$，12 の 2 個．

$cd=k$ となる k についても同様である．

起こり得る a，b，c，d の目の出方の総数は 6^4 通り．

このうち，$ab=cd$ となる場合の数は

$$1^2\times5+2^2\times10+3^2\times1+4^2\times2=86\ (\text{通り})$$

よって，$ab=cd$ となる確率は

$$\frac{86}{6^4}=\mathbf{\frac{43}{648}}$$

第６講　場合の数・確率(4)

A，B の２チームが試合をくり返し行い，先に３勝したチームを優勝とする．１回の試合で A チームが勝つ確率は $\frac{2}{3}$，B チームが勝つ確率は $\frac{1}{3}$ で，引き分けはないものとする．

(1)　優勝が決まるまでに B チームが少なくとも１勝する確率は $\frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である．

(2)　４試合目で優勝が決まる確率は $\frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$ である．

(3)　１試合目で A チームが勝ち，A チームが優勝する確率は $\frac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サシ}}$ である．

解答例

(1)　B チームが少なくとも１勝するという事象の余事象は，A チームが３連勝することである．

A チームが３連勝する確率は　$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

よって，B チームが少なくとも１勝する確率は　$1-\frac{8}{27}=\mathbf{\frac{19}{27}}$

(2)　４試合目で優勝が決まるのは，次の(ⅰ)，(ⅱ)のいずれかの場合である．

(ⅰ)　３試合目までに A が２勝１敗で，４試合目に A が勝つ．

(ⅱ)　３試合目までに B が２勝１敗で，４試合目に B が勝つ．

(ⅰ)の確率は　$\left\{{}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\right\}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

(ⅱ)の確率は　$\left\{{}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1\right\}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$

よって，求める確率は　$\frac{8}{27}+\frac{2}{27}=\mathbf{\frac{10}{27}}$

(3)　１試合目で A が勝ち，A が優勝するのは，次の(ⅰ)～(ⅲ)のいずれかの場合である．

(ⅰ)　A が３連勝する．

(ⅱ)　１試合目は A が勝ち，２，３試合目で A が１勝１敗で，４試合目に A が勝つ．

(ⅲ)　１試合目は A が勝ち，２～４試合目で A が１勝２敗で，５試合目に A が勝つ．

(ⅰ)の確率は　$\frac{8}{27}$

(ⅱ)の確率は　$\frac{2}{3}\times{}_2C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$

(ⅲ)の確率は　$\frac{2}{3}\times{}_3C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$

よって，求める確率は　$\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\frac{8}{81}=\frac{48}{81}=\mathbf{\frac{16}{27}}$

第7講　三角比・平面図形

(1)　$\mathrm{OA}=a-2$，$\mathrm{OB}=4-\dfrac{a}{3}$，$\angle \mathrm{O}=120^\circ$ であるような三角形 OAB について考える．

三角形 OAB の面積 S を a を用いて表すと

$$S=-\frac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イウ}}\left(a^2-\boxed{エオ}\,a+\boxed{カキ}\right)$$ である．

$\mathrm{OA}=\boxed{ク}$，$\mathrm{OB}=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ のとき，S は最大値 $\dfrac{\boxed{サシ}\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セソ}}$ をとる．

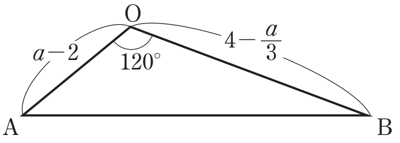
(2)　△ABC において AB＝4，BC＝2，CA＝3 とし，辺 AB 上に点 P をとり，$\mathrm{AP}=x$ とおく．さらに，辺 AC 上に点 Q を $\mathrm{AQ}=\dfrac{6}{x}$ となるようにとる．このとき，線分 PQ の長さの 2 乗を x を用いて表すと，$\mathrm{PQ}^2=x^2+\dfrac{\boxed{タチ}}{x^2}-\dfrac{\boxed{ツテ}}{2}$ であり，PQ の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ト}}}{2}$ である．ただし，$x>2$ とする．

解答例

(1)　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin\angle\mathrm{O}=\dfrac{1}{2}(a-2)\left(4-\dfrac{a}{3}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=-\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{12}}(a^2-\mathbf{14}a+\mathbf{24})$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{12}(a-7)^2+\dfrac{25\sqrt{3}}{12}$



$\mathrm{OA}=a-2>0$，$\mathrm{OB}=4-\dfrac{a}{3}>0$ より　$2<a<12$

この範囲で，S は $a=7$ のとき，最大値 $\dfrac{\mathbf{25}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{12}}$ をとる．

このとき，$\mathrm{OA}=\mathbf{5}$，$\mathrm{OB}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$

(2)　△ABC において余弦定理より　$\cos A=\dfrac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot3\cdot4}=\dfrac{7}{8}$

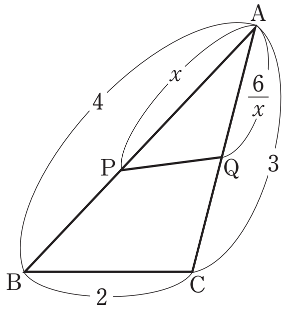
△APQ において余弦定理より

$$\mathrm{PQ}^2=x^2+\left(\frac{6}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{6}{x}\cdot\frac{7}{8}=x^2+\frac{\mathbf{36}}{x^2}-\frac{\mathbf{21}}{2}$$

x のとり得る値の範囲は $2<x\leqq4$ である．

$x^2>0$，$\dfrac{36}{x^2}>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均) だから

$$x^2+\frac{36}{x^2}\geqq2\sqrt{x^2\cdot\frac{36}{x^2}}=12$$



よって　$PQ^2=x^2+\dfrac{36}{x^2}-\dfrac{21}{2}\geqq\dfrac{3}{2}$

等号成立は，$x^2=\dfrac{36}{x^2}$ より，$x^2=6$，すなわち $x=\sqrt{6}$ のとき．

よって，$x=\sqrt{6}$ のとき PQ^2 は最小で，このとき PQ も最小となる．

以上より，PQ の最小値は　$\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

第８講　三角関数(1)

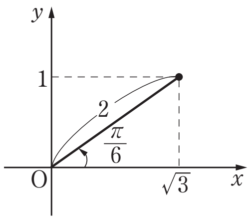
$0 \leqq \theta < \pi$ とする．このとき，

$$f(\theta)=\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta=\boxed{\text{ア}}\sin\left(\boxed{\text{イ}}\,\theta+\frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$$

が成り立つ．$f(\theta)$ の最小値は $\boxed{\text{エオ}}$ であり，そのときの θ の値は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ である．

解答例

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\\&=\frac{1+\cos 2\theta}{2}+2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1-\cos 2\theta}{2}\\&=\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta\\&=\mathbf{2}\sin\left(\mathbf{2}\theta+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right)\end{aligned}$$



よって，$f(\theta)$ は $\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき最小値 $\mathbf{-2}$ をとる．

$0 \leqq \theta < \pi$ より，$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6} < 2\pi+\dfrac{\pi}{6}$ だから，$\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき

$$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi \quad \text{すなわち} \quad \theta=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\pi$$

第9講　三角関数(2)

関数 $y=\sin\theta\cos\theta-\sin\theta+\cos\theta$ について考える．

(1)　$t=\cos\theta-\sin\theta$ とおくとき，y を t の式で表すと，$y=-\dfrac{1}{\boxed{ア}}t^2+t+\dfrac{1}{\boxed{イ}}$ となる．

(2)　θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，t の動く範囲は，$-\sqrt{\boxed{ウ}}\leqq t\leqq\boxed{エ}$ となる．

(3)　θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，y は，$\theta=\boxed{オ}$ のとき最大値 $\boxed{カ}$，

$\theta=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{\boxed{ケ}}-\sqrt{\boxed{コ}}$ をとる．

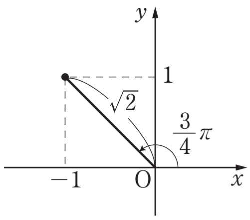
解答例

(1)　$t^2=(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{2}$

$$y=\sin\theta\cos\theta+(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{1-t^2}{2}+t=-\frac{1}{\mathbf{2}}t^2+t+\frac{1}{\mathbf{2}}$$

(2)　$t=-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

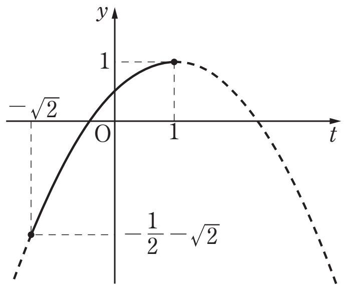


$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta+\dfrac{3}{4}\pi\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ だから

$$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，t のとり得る値の範囲は　$-\sqrt{\mathbf{2}}\leqq t\leqq\mathbf{1}$

(3)　$y=-\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2+1$



$-\sqrt{2}\leqq t\leqq1$ の範囲で，y は $t=1$ のとき最大値 1，

$t=-\sqrt{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}$ をとる．

ここで，$t=1$ のとき　$\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{4}\pi$ より　$\theta=0$

$t=-\sqrt{2}$ のとき　$\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)=-1$　　$\theta+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$ より　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

以上より，$\theta=\mathbf{0}$ のとき最大値 $\mathbf{1}$，$\theta=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{\mathbf{2}}-\sqrt{\mathbf{2}}$

第10講　指数関数・対数関数

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とする．

(1)　3^{20} の一の位の数字は［ア］である．

(2)　n を自然数とし，3^n が21桁で一の位の数が7である．

このとき，$n=$［イウ］である．

また，この n に対して，$\log_{10}3^n=$［エオ］.［カキクケ］であるから，3^n の最高位の数字は［コ］である．

解答例

(1)　$3^4=81$ であり

$$3^{20}=(3^4)^5=81^5$$

であるから，3^{20} の一の位の数字は　**1**

(2)　3^n が21桁のとき　$10^{20}\leqq 3^n<10^{21}$

$$\log_{10}10^{20}\leqq\log_{10}3^n<\log_{10}10^{21}$$

$$20\leqq n\cdot\log_{10}3<21$$

$$\frac{20}{0.4771}\leqq n<\frac{21}{0.4771}$$

$$41.9\cdots\leqq n<44.01\cdots$$

よって　$n=42$，43，44

ここで，3^nの一の位の数字を調べる．

$n=42$ のとき　$3^{42}=(3^{20})^2\cdot 3^2$　　一の位の数字は9

$n=43$ のとき　$3^{43}=(3^{20})^2\cdot 3^3$　　一の位の数字は7

$n=44$ のとき　$3^{44}=(3^{20})^2\cdot 3^4$　　一の位の数字は1

よって，求める n の値は　$n=$**43**

次に，$A=3^{43}$ とすると

$$\log_{10}A=43\cdot\log_{10}3=43\times 0.4771=\mathbf{20.5153}$$

よって　$A=10^{20.5153}=10^{0.5153}\times 10^{20}$

A の最高位の数字は，$10^{0.5153}$ の整数部分である．

$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$ だから

$$\log_{10}3<0.5153<\log_{10}4$$

$$\log_{10}3<\log_{10}10^{0.5153}<\log_{10}4$$

よって　$3<10^{0.5153}<4$

すなわち，A の最高位の数字は　**3**

第 12 講　図形と方程式(2)

方程式 $x^2+y^2+2kx-4ky+10k-20=0$ の表す円 C を考える．ただし，k は実数とする．

(1)　円 C は k がどのような値であっても定点を通る．その定点の座標は

$(-$ ア $+$ イ $\sqrt{3}$, ウ $+\sqrt{3})$，$(-$ ア $-$ イ $\sqrt{3}$, ウ $-\sqrt{3})$

(2)　円 C の面積の最小値は エオ π であり，このときの k の値は カ である．

(3)　円 C と直線 $y=x-2$ が共有点を 1 個だけもつのは，$k=$ キク $\pm 2\sqrt{\text{ケコ}}$ のときである．

解答例

(1)　$x^2+y^2+2kx-4ky+10k-20=0$　……(＊)

左辺を k について整理すると

$$(x^2+y^2-20)+2k(x-2y+5)=0$$

これが k についての恒等式となるとき

$$\begin{cases} x^2+y^2-20=0 & \cdots\cdots① \\ x-2y+5=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②より　$x=2y-5$　……③

①に代入して　$(2y-5)^2+y^2-20=0$

$y^2-4y+1=0$　　$y=2\pm\sqrt{3}$

③より　$(x,\ y)=(-1+2\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$，$(-1-2\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3})$

よって，円 C が通る定点の座標は

$(-\mathbf{1}+\mathbf{2}\sqrt{3},\ \mathbf{2}+\sqrt{3})$，$(-1-2\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3})$

(2)　(＊) より　$(x+k)^2+(y-2k)^2=5k^2-10k+20$

$(x+k)^2+(y-2k)^2=5(k-1)^2+15$

この円の中心は $(-k,\ 2k)$，半径は $\sqrt{5(k-1)^2+15}$ である．

半径が最小になるのは，$k=1$ のときで，このときの半径は $\sqrt{15}$ である．

よって，円 C の面積の最小値は　$\pi\cdot(\sqrt{15})^2=\mathbf{15}\pi$

このとき　$k=\mathbf{1}$

[別解]

C は定点 $(-1+2\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$，$(-1-2\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3})$ を通る円である．

この 2 点を通る最も小さい円は，この 2 点を直径の両端とするものである．

その中心は 2 点の中点 $(-1,\ 2)$，半径は $\dfrac{1}{2}\sqrt{(4\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{15}$

よって，その方程式は　$(x+1)^2+(y-2)^2=15$　つまり　$x^2+y^2+2x-4y-10=0$

これを $x^2+y^2+2kx-4ky+10k-20=0$ と比較すると，$k=1$ である．

したがって，$k=\mathbf{1}$ のとき円 C の面積は最小値 $\mathbf{15}\pi$ をとる．

(3)　$y=x-2$ を (＊) に代入すると

$$x^2+(x-2)^2+2kx-4k(x-2)+10k-20=0$$

$$x^2-(k+2)x+9k-8=0 \quad \cdots\cdots ④$$

円 C と直線 $y=x-2$ の共有点が 1 個であるのは，この円と直線が接するときだから，④の判別式を D とすると

$$D=(k+2)^2-4(9k-8)=0$$

$$k^2-32k+36=0$$

これを解いて　$k=\mathbf{16}\pm 2\sqrt{\mathbf{55}}$

第13講　図形と方程式(3)

座標平面上に2点 A$(-1,\ 0)$，B$(3,\ 2)$ をとる．m を実数とし，直線 $y=mx$ を l とする．

(1)　l 上の点 P の座標を $(t,\ mt)$ とするとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を，t，m を用いて表すと，

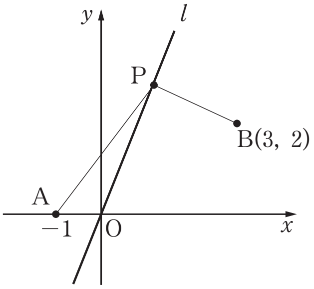
$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=$ ア $(m^2+$ イ $)t^2-$ ウ $(m+1)t+$ エオ となる．

(2)　点 P が l 上を動くとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を最小にする P の座標を $(X,\ Y)$ とおく．X，Y を m で表すと，$X=\dfrac{m+\text{カ}}{m^2+\text{キ}}$，$Y=\dfrac{m(m+\text{ク})}{m^2+\text{キ}}$ となる．

(3)　m が実数全体を動くとき，点 P$(X,\ Y)$ はある曲線上を動く．その曲線は，

円 $\left(x-\dfrac{1}{\text{ケ}}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{\text{コ}}\right)^2=\dfrac{1}{\text{サ}}$ である．ただし，点 $(0,\ 1)$ は除く．

解答例



(1)　$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=(t+1)^2+(mt)^2+(t-3)^2+(mt-2)^2$

$=t^2+2t+1+m^2t^2+t^2-6t+9+m^2t^2-4mt+4$

$=\mathbf{2}(m^2+\mathbf{1})t^2-\mathbf{4}(m+1)t+\mathbf{14}$

(2)　$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=2(m^2+1)\left(t^2-\dfrac{2(m+1)}{m^2+1}t\right)+14$

$=2(m^2+1)\left(t-\dfrac{m+1}{m^2+1}\right)^2-\dfrac{2(m+1)^2}{m^2+1}+14$

$2(m^2+1)>0$ だから，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ は，$t=\dfrac{m+1}{m^2+1}$ のとき最小となる．

このとき　$X=t=\dfrac{m+\mathbf{1}}{m^2+\mathbf{1}}$，$Y=mt=\dfrac{m(m+\mathbf{1})}{m^2+1}$

(3)　X，Y は，$Y=mX$　……①，$X=\dfrac{m+1}{m^2+1}$　……②を満たす．

(i)　$X=0$ のとき，①より　$Y=0$　……③

(ii)　$X\neq0$ のとき，①より　$m=\dfrac{Y}{X}$　……①′

②より　$X(m^2+1)=m+1$

①′ を代入すると　$X\left(\dfrac{Y^2}{X^2}+1\right)=\dfrac{Y}{X}+1$

両辺に X をかけると　$Y^2+X^2=Y+X$

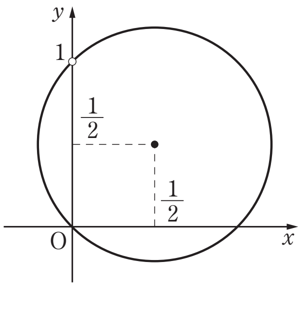
$X^2+Y^2-X-Y=0$

$\left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

ここで $X\neq0$ より　$Y\neq0$，$Y\neq1$

(i)，(ii)より，点 P$(X,\ Y)$ の軌跡は

円 $\left(x-\dfrac{1}{\mathbf{2}}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{\mathbf{2}}\right)^2=\dfrac{1}{\mathbf{2}}$　ただし，点 $(0,\ 1)$ は除く．



第 14 講　図形と方程式(4)

座標平面上の 2 つの直線 l_1，l_2 と円 C を，$l_1：3x-y-1=0$，$l_2：x+3y-3=0$，$C：x^2+y^2-4x-2y+3=0$ と定めるとき，次の問いに答えよ．

(1)　直線 l_1 と直線 l_2 の交点の座標は，$\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\right)$ である．

(2)　円 C と直線 l_1 の共有点の座標は，$(\boxed{エ},\ \boxed{オ})$，$\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\right)$ である．

(3)　円 C と直線 l_2 の共有点の座標は，$(\boxed{カ},\ \boxed{キ})$，$\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\right)$ である．

(4)　連立不等式 $\begin{cases}(3x-y-1)(x+3y-3)\leqq 0\\ x^2+y^2-4x-2y+3\leqq 0\end{cases}$ の表す領域の面積は，$\pi-\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．

解答例

$l_1：3x-y-1=0$　……①

$l_2：x+3y-3=0$　……②

$C：x^2+y^2-4x-2y+3=0$　……③

(1)　①，②を連立方程式として解くと　$x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$

よって，l_1 と l_2 の交点の座標は　$\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right)$

(2)　①より　$y=3x-1$　……①′

①′を③に代入すると

$x^2+(3x-1)^2-4x-2(3x-1)+3=0$

$10x^2-16x+6=0$

$5x^2-8x+3=0$

$(x-1)(5x-3)=0$

$x=1,\ \dfrac{3}{5}$

①′より，$x=1$ のとき　$y=2$

$x=\dfrac{3}{5}$ のとき　$y=\dfrac{4}{5}$

よって，円 C と直線 l_1 の共有点の座標は

$(\mathbf{1},\ \mathbf{2})$，$\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

(3)　②より　$x=-3y+3$　……②′

②′を③に代入すると

$(-3y+3)^2+y^2-4(-3y+3)-2y+3=0$

$10y^2-8y=0$

$2y(5y-4)=0$

$y=0,\ \dfrac{4}{5}$

②′より，$y=0$ のとき　$x=3$

$y=\dfrac{4}{5}$ のとき　$x=\dfrac{3}{5}$

よって，円 C と直線 l_2 の共有点の座標は

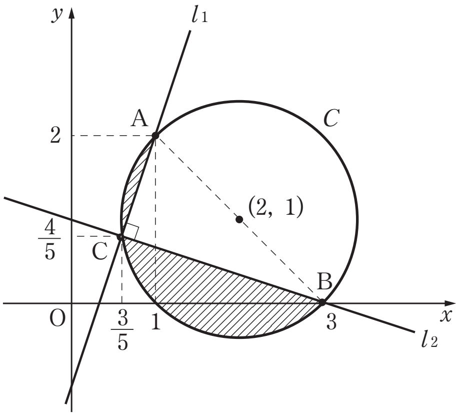
$\mathbf{(3,\ 0)},\ \left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

(4) $\begin{cases}(3x-y-1)(x+3y-3)\leqq 0 & \cdots\cdots④\\ x^2+y^2-4x-2y+3\leqq 0 & \cdots\cdots⑤\end{cases}$

④より $\begin{cases}3x-y-1\geqq 0\\ x+3y-3\leqq 0\end{cases}$ または $\begin{cases}3x-y-1\leqq 0\\ x+3y-3\geqq 0\end{cases}$

⑤より　$(x-2)^2+(y-1)^2\leqq 2$

よって，④かつ⑤の表す領域は，右図の斜線部分で，境界を含む．



円 C の中心は点 (2，1)，半径は $\sqrt{2}$ である．

また，3 点 (1，2)，(3，0)，$\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ をそれぞれ A，B，C とすると，線分 AB は円 C の直径である．

よって

$\mathrm{AC}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

$\mathrm{BC}=\sqrt{\left(\dfrac{12}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$

求める面積は，半円の面積から △ABC の面積を引いたものだから

$\pi\cdot(\sqrt{2})^2\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\cdot\dfrac{4\sqrt{10}}{5}=\pi-\mathbf{\dfrac{8}{5}}$

第15講　微分法・積分法(1)

関数 $y=27^x+27^{-x}-6(9^x+9^{-x})+12(3^x+3^{-x})-13$ について，$t=3^x+3^{-x}$ とおく．

(1)　t は，$t\geqq$ [ア] を満たす．この等号が成り立つのは $x=$ [イ] のときである．

(2)　y は t を用いて $y=t^3-$ [ウ] t^2+ [エ] $t-$ [オ] と表される．

したがって，y の最小値は [カキ] である．

(3)　$y=0$ となるような異なる実数 t は全部で [ク] 個あり，このそれぞれの t に対して，異なる [ケ] 個の実数 x が定まる．

解答例

(1)　$3^x>0$，$3^{-x}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) より

$$t=3^x+3^{-x}\geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}$$

すなわち　$t\geqq \mathbf{2}$

等号成立は $3^x=3^{-x}$，つまり $x=\mathbf{0}$ のとき．

(2)　$t=3^x+3^{-x}$ のとき

$$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}=t^2-2$$

$$27^x+27^{-x}=(3^x+3^{-x})^3-3\cdot 3^x\cdot 3^{-x}(3^x+3^{-x})=t^3-3t$$

よって

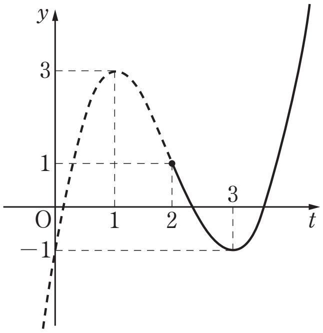
$$y=(t^3-3t)-6(t^2-2)+12t-13=t^3-\mathbf{6}t^2+\mathbf{9}t-\mathbf{1}\quad\cdots\cdots(*)$$

$$y'=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$$

$t\geqq 2$ の範囲で y の増減表は右表のようになるので，y は $t=3$ のとき最小値 $\mathbf{-1}$ をとる．

t	2	…	3	…
y'		−	0	+
y	1	↘	−1	↗

(3)　$t\geqq 2$ における $(*)$ のグラフは右図のようになるから，$y=0$ となる異なる実数 t は **2** 個である．



ここで，$t>2$ のとき，$3^x+3^{-x}=t$ より

$$(3^x)^2-t\cdot 3^x+1=0$$

$$3^x=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$$

$$x=\log_3\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$$

よって，$y=0$ となる実数 t に対し，異なる **2** 個の実数 x が定まる．

第16講　微分法・積分法(2)

曲線 $y=x^3-2x$ を C とする．

(1)　曲線 C 上の点 $(t,\ t^3-2t)$ における C の接線の方程式は

$y=($ ア t^2- イ $)x-$ ウ t^3 である．

(2)　a，b を定数とし，$a\neq 0$ とする．

点 $(a,\ b)$ から曲線 C に接線が３本引けるときの a，b の条件を求める．

まず，a，b および(1)の t を用いると，求める条件は，t の３次方程式

エ t^3- オ at^2+ カ $a+b=0$

が異なる キ 個の実数解をもつことである．

したがって，a，b の条件は ク である．

ク は，次の①～④のうちから適するものを選べ．

①　$(2a+b)(a^3-2a-b)>0$　　②　$(2a+b)(a^3-2a-b)<0$

③　$(2a-b)(a^3+2a-b)>0$　　④　$(2a-b)(a^3+2a-b)<0$

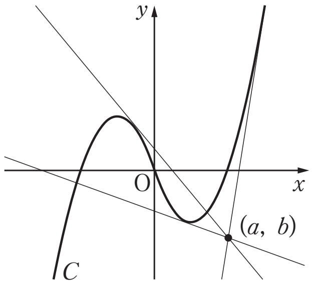
解答例

(1)　$y=x^3-2x$ より　$y'=3x^2-2$

曲線 C 上の点 $(t,\ t^3-2t)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t)$$

$$y=(\mathbf{3}t^2-\mathbf{2})x-\mathbf{2}t^3$$



(2)　(1)で求めた接線が点 $(a,\ b)$ を通るとき

$$b=(3t^2-2)a-2t^3$$

すなわち　$\mathbf{2}t^3-\mathbf{3}at^2+\mathbf{2}a+b=0$　……(＊)

点 $(a,\ b)$ から３本の接線が引けるための条件は，t の３次方程式(＊)が異なる **3** 個の実数解をもつことである．

$f(t)=2t^3-3at^2+2a+b$ とおくと

$$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$$

$f(t)$ の増減表は右図となるから

$a>0$ のとき，極大値 $f(0)$，極小値 $f(a)$

$a<0$ のとき，極大値 $f(a)$，極小値 $f(0)$

をとる．

$a>0$ のとき

t	…	0	…	a	…
$f'(t)$	＋	0	－	0	＋
$f(t)$	↗	極大	↘	極小	↗

$a<0$ のとき

t	…	a	…	0	…
$f'(t)$	＋	0	－	0	＋
$f(t)$	↗	極大	↘	極小	↗

求める条件は，(極大値)>0 かつ (極小値)<0 であることだから

$$f(0)\cdot f(a)=(2a+b)(-a^3+2a+b)<0$$

すなわち　$\mathbf{(2a+b)(a^3-2a-b)>0}$（**①**）

第17講　微分法・積分法(3)

関数 $f(t)=\int_0^1|(x-1)(x-t)|\,dx$　$(0\leqq t\leqq 1)$ について，

(1)　$f(t)$ を t の関数として表すと，$f(t)=-\dfrac{1}{\boxed{ア}}t^3+t^2-\dfrac{1}{\boxed{イ}}t+\dfrac{1}{\boxed{ウ}}$ である．

(2)　$f'(t)=0$　$(0<t<1)$ となる t の値は $t=\dfrac{\boxed{エ}-\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ である．

(3)　$f(t)$　$(0\leqq t\leqq 1)$ の最小値は $\dfrac{\boxed{キ}-\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ である．

解答例

(1)　$f(t)=\int_0^t|(x-1)(x-t)|\,dx+\int_t^1|(x-1)(x-t)|\,dx$

$$=\int_0^t(x-1)(x-t)\,dx-\int_t^1(x-1)(x-t)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1+t}{2}x^2+tx\right]_0^t+\frac{(1-t)^3}{6}$$

$$=-\frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2}+\frac{1-3t+3t^2-t^3}{6}$$

$$=-\frac{1}{\mathbf{3}}t^3+t^2-\frac{1}{\mathbf{2}}t+\frac{1}{\mathbf{6}}$$

(2)　$f'(t)=-t^2+2t-\dfrac{1}{2}$

$f'(t)=0$ より　$-t^2+2t-\dfrac{1}{2}=0$　これを解いて　$t=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

$0<t<1$ より　$t=\dfrac{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$

(3)　$0\leqq t\leqq 1$ の範囲で，$f(t)$ の増減表は右表のようになるから，$f(t)$ は $t=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ で極小かつ最小となる．

t	0	…	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	…	1
$f'(t)$		−	0	＋	
$f(t)$		↘	極小	↗	

ここで $f(t)$ を $t^2-2t+\dfrac{1}{2}$ で割ると，商は $-\dfrac{t}{3}+\dfrac{1}{3}$，

余りは $\dfrac{t}{3}$ であるから

$$f(t)=\left(t^2-2t+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{t}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{t}{3}$$

$t=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ のとき $t^2-2t+\dfrac{1}{2}=0$ であるから，最小値は

$$f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{6}}$$

第 18 講　微分法・積分法(4)

曲線 $y=x^2(x-1)$ を C とし，C 上の点 $(t,\ t^2(t-1))$ における接線を l とする．

(1)　C と l が，接点以外に共有点をもつのは $t \neq \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ のときであり，このとき，接点以外の共有点の x 座標は $\boxed{ウ}-\boxed{エ}\,t$ である．

(2)　$t>\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ のとき，C と l で囲まれた図形の面積が $\dfrac{4}{3}$ になるのは，$t=\boxed{オ}$ のときである．

解答例

(1)　$C:y=x^3-x^2$ より　$y'=3x^2-2x$

曲線 C 上の点 $(t,\ t^2(t-1))$ における接線 l の方程式は　$y-t^2(t-1)=(3t^2-2t)(x-t)$

$$y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2$$

C と l の共有点の x 座標は　$x^3-x^2=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2$

$$x^3-x^2-(3t^2-2t)x+2t^3-t^2=0$$

$$(x-t)^2(x+2t-1)=0$$

よって　$x=t,\ 1-2t$

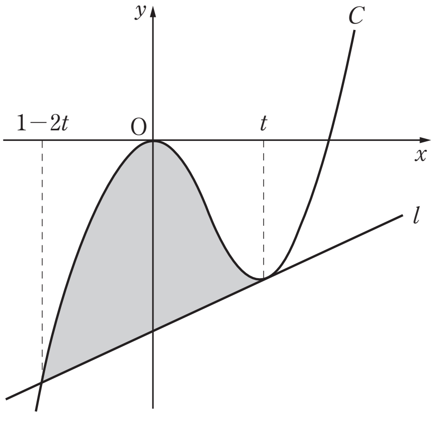
したがって，C と l が接点以外に共有点をもつための条件は　$t \neq 1-2t$

すなわち　$t \neq \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

また，接点以外の共有点の x 座標は　$\boldsymbol{1-2t}$

(2)　$t>\dfrac{1}{3}$ のとき，$1-2t<t$ である．

C と l で囲まれた図形の面積を S とすると



$$S=\int_{1-2t}^{t}\{(x^3-x^2)-(3t^2-2t)x+2t^3-t^2\}\,dx$$

$$=\int_{1-2t}^{t}(x-t)^2(x+2t-1)\,dx$$

$$=\int_{1-2t}^{t}(x-t)^2\{(x-t)+(3t-1)\}\,dx$$

$$=\int_{1-2t}^{t}\{(x-t)^3+(3t-1)(x-t)^2\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-t)^4+\frac{3t-1}{3}(x-t)^3\right]_{1-2t}^{t}$$

$$=-\frac{1}{4}(1-3t)^4+\frac{1}{3}(1-3t)^4=\frac{(1-3t)^4}{12}$$

これが $\dfrac{4}{3}$ であるとき　$\dfrac{(1-3t)^4}{12}=\dfrac{4}{3}$　　$(3t-1)^4=16$

$t>\dfrac{1}{3}$ より $3t-1=2$　　$t=\boldsymbol{1}$

第19講　ベクトル(1)

$\vec{a}$，$\vec{b}$ を単位ベクトルとし，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{d}=-\vec{a}+2\vec{b}$ とおく．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0<\theta<\pi)$ とし，$x=\cos\theta$ とおく．

(1)　$\vec{c}$ と $\vec{d}$ の大きさは，$|\vec{c}|=\sqrt{\boxed{ア}+\boxed{ア}x}$，$|\vec{d}|=\sqrt{\boxed{イ}-\boxed{ウ}x}$ である．

(2)　内積 $\vec{c}\cdot\vec{d}$ を x を用いて表すと，$\vec{c}\cdot\vec{d}=\boxed{エ}+x$ となる．

(3)　$\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角も θ に等しいとき，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{オ}}$ となる．

解答例

(1)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=x$

$$|\vec{c}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$=1+2x+1=2+2x$$

$|\vec{c}|\geqq 0$ より　$|\vec{c}|=\sqrt{\mathbf{2}+2x}$

$$|\vec{d}|^2=|-\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$
$$=1-4x+4=5-4x$$

$|\vec{d}|\geqq 0$ より　$|\vec{d}|=\sqrt{\mathbf{5}-\mathbf{4}x}$

(2)　$\vec{c}\cdot\vec{d}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}+2\vec{b})=-|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2$

$$=-1+x+2=\mathbf{1}+x \quad \cdots\cdots①$$

(3)　$\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角が θ であるとき

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=|\vec{c}||\vec{d}|\cos\theta=\sqrt{2(1+x)}\sqrt{5-4x}\cdot x \quad \cdots\cdots②$$

①，②より　$\sqrt{2}\sqrt{1+x}\sqrt{5-4x}\cdot x=1+x$　……③

$0<\theta<\pi$ より，$-1<\cos\theta<1$ だから　$-1<x<1$

$\sqrt{1+x}>0$ だから，③の両辺を $\sqrt{1+x}$ で割ると

$$\sqrt{2}\sqrt{5-4x}\cdot x=\sqrt{1+x} \quad \cdots\cdots④$$

この等式の右辺は正だから，左辺も正である．よって　$0<x<1$　……⑤

④の両辺を2乗すると

$$2x^2(5-4x)=1+x$$
$$8x^3-10x^2+x+1=0$$
$$(x-1)(2x-1)(4x+1)=0$$

⑤を満たす x を求めると　$x=\dfrac{1}{2}$

$x=\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$0<\theta<\pi$ だから　$\theta=\dfrac{\pi}{\mathbf{3}}$

第20講　ベクトル(2)

平面上に三角形OABがある．辺OAを1：2に内分する点をC，辺OBを2：1に内分する点をDとし，線分ADとBCの交点をEとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする．

(1)　$\overrightarrow{OE}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\vec{b}$ である．

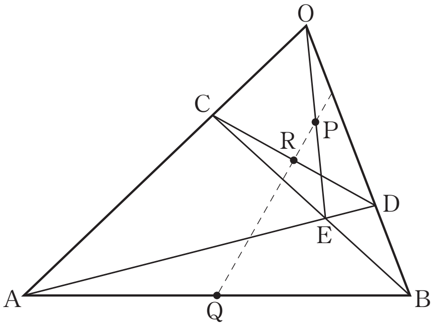
(2)　線分OEの中点をP，辺ABの中点をQとし，線分CDを $k:(1-k)$（k は実数）に内分する点をRとする．このとき，

$$\overrightarrow{RQ}=\frac{\boxed{エ}+\boxed{オ}k}{\boxed{カ}}\vec{a}+\frac{\boxed{キ}-\boxed{ク}k}{\boxed{カ}}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\boxed{ケ}}{14}\left(\boxed{コ}\vec{a}+\vec{b}\right)$$ である．

また，3点P，Q，Rが一直線上にあるときの k の値は，$k=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である．

解答例



(1)　AE：ED$=s:(1-s)$（s は実数）とすると

$$\overrightarrow{OE}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$$
$$=(1-s)\vec{a}+\frac{2s}{3}\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$

BE：EC$=t:(1-t)$（t は実数）とすると

$$\overrightarrow{OE}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$
$$=\frac{t}{3}\vec{a}+(1-t)\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{0}$ でなく，平行でもないから，①，②より

$$1-s=\frac{t}{3},\quad \frac{2s}{3}=1-t$$

よって　$s=\dfrac{6}{7}$，$t=\dfrac{3}{7}$

①より　$\overrightarrow{OE}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\vec{a}+\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$，$\overrightarrow{OR}=(1-k)\overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{OD}=\dfrac{1-k}{3}\vec{a}+\dfrac{2k}{3}\vec{b}$ だから

$$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\left(\frac{1-k}{3}\vec{a}+\frac{2k}{3}\vec{b}\right)=\frac{\mathbf{1+2}k}{\mathbf{6}}\vec{a}+\frac{\mathbf{3-4}k}{6}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$$
$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}\right)=\frac{\mathbf{3}}{14}(\mathbf{2}\vec{a}+\vec{b})$$

3点P，Q，Rが一直線上にあるのは，$\overrightarrow{PQ}\,/\!/\,\overrightarrow{RQ}$ のときだから

$(1+2k):(3-4k)=2:1$

$1+2k=6-8k$

$k=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

第22講　ベクトル(4)

Oを原点とする座標空間に3点A(2, 1, 2), B(1, 0, 3), C(0, 1, 1)がある．実数tを用いて，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$で表される点Pは，(［ア］$-t$, ［イ］$-t$, ［ウ］$+t$)と表され，点Pが$xy$平面上にあるとき，$t=$［エオ］である．また，$\overrightarrow{CP}$と$\overrightarrow{AB}$が垂直であるとき，$t=\dfrac{［カ］}{［キ］}$である．

解答例

$$\overrightarrow{AB}=(1-2,\ 0-1,\ 3-2)=(-1,\ -1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(2,\ 1,\ 2)+t(-1,\ -1,\ 1)$$

$$=(2-t,\ 1-t,\ 2+t)$$

よって，点Pの座標は

$$(\mathbf{2}-t,\ \mathbf{1}-t,\ \mathbf{2}+t)$$

点Pがxy平面上にあるとき，Pのz座標は0だから

$$2+t=0$$

$$t=\mathbf{-2}$$

また　$\overrightarrow{CP}=(2-t,\ 1-t-1,\ 2+t-1)=(2-t,\ -t,\ 1+t)$

$\overrightarrow{CP}\perp\overrightarrow{AB}$のとき，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$であるから

$$(2-t)\cdot(-1)+(-t)\cdot(-1)+(1+t)\cdot 1=0$$

$$-2+t+t+1+t=0$$

$$3t-1=0$$

$$t=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

第 23 講　数列(1)

初項が 5 である等差数列 $\{a_n\}$ と，初項が 2 である等比数列 $\{b_n\}$ がある $(n=1, 2, 3, \cdots)$．数列 $\{c_n\}$ が，$c_n=a_n-b_n$，$c_2=5$，$c_3=-1$，$c_4=-31$ で定められるとき，次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の公差は **ア**，数列 $\{b_n\}$ の公比は **イ** である．

(2)　数列 $\{c_n\}$ の一般項は，$c_n=$ **ウ** $n-1-$ **エ** $\cdot$ **オ** $^{n-1}$ である．

(3)　数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和は $S_n=$ **カ** n^2+ **キ** $n+1-$ **ク** ^{n} となる．

解答例

(1)　$\{a_n\}$ の公差を d，$\{b_n\}$ の公比を r とすると

$$a_n=5+(n-1)d,\quad b_n=2\cdot r^{n-1}$$

$$c_n=a_n-b_n=5+(n-1)d-2\cdot r^{n-1}$$

$c_2=5$，$c_3=-1$，$c_4=-31$ より

$$5+d-2r=5 \quad \cdots\cdots①$$

$$5+2d-2r^2=-1 \quad \cdots\cdots②$$

$$5+3d-2r^3=-31 \quad \cdots\cdots③$$

①より　$d=2r$　……④

②，④より　$5+4r-2r^2=-1$

$$r^2-2r-3=0$$

$$(r+1)(r-3)=0$$

$$r=-1,\ 3$$

④より，$r=-1$ のとき　$d=-2$

$r=3$ のとき　$d=6$

このうち③を満たすものは　$d=6$，$r=3$

よって，$\{a_n\}$ の公差は **6**，$\{b_n\}$ の公比は **3**

(2)　(1)の結果から

$$c_n=5+(n-1)\cdot 6-2\cdot 3^{n-1}$$

$$=\mathbf{6}n-1-\mathbf{2}\cdot\mathbf{3}^{n-1}$$

(3)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k-1-2\cdot 3^{k-1})$

$$=6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n-\frac{2(3^n-1)}{3-1}$$

$$=\mathbf{3}n^2+\mathbf{2}n+1-\mathbf{3}^n$$

第24講　数列(2)

$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$，$T=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}$ とする．

(1)　$S=$ **ア** $-\frac{n+\boxed{イ}}{2^n}$ である．

(2)　T は S を用いて，$T=$ **ウ** $S-$ **エ** $+\frac{\boxed{オ}-n^2}{2^n}$ と表される．

以上の結果を用いると，$\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot 2^{n-k}=$ **カ** $\cdot 2^n-n^2-$ **キ** $n-$ **ク** である．

解答例

(1)
$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{n}{2^n}$$
$$\frac{1}{2}S=\qquad\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$$
辺々を引くと
$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{2+n}{2^{n+1}}$$
よって　$S=\mathbf{2}-\frac{n+\mathbf{2}}{2^n}$

(2)
$$T=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{2^n}$$
$$\frac{1}{2}T=\qquad\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{(n-1)^2}{2^n}+\frac{n^2}{2^{n+1}}$$
辺々を引くと
$$\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{2n-1}{2^n}-\frac{n^2}{2^{n+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}-\frac{n^2}{2^{n+1}}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{n^2}{2^{n+1}}$$
$$=2S-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n^2}{2^{n+1}}=2S-1+\frac{2-n^2}{2^{n+1}}$$
よって　$T=\mathbf{4}S-\mathbf{2}+\frac{\mathbf{2}-n^2}{2^n}$

また　$\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot 2^{n-k}=2^n\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}=2^nT$
$$=2^n\left(8-\frac{4n+8}{2^n}-2+\frac{2-n^2}{2^n}\right)=\mathbf{6}\cdot 2^n-n^2-\mathbf{4}n-\mathbf{6}$$

追加練習問題

第 25 講　数列(3)

n を整数とする．連立不等式 $\frac{1}{2}x \leqq y \leqq 2x$，$1 \leqq x \leqq 2n$ の表す領域を D とし，D の周上および内部にある格子点の個数を a_n とする．ただし，格子点とは，x 座標，y 座標がともに整数の点である．

(1)　$a_1 =$ [ア] である．

(2)　D の周上および内部にある格子点のうち，$x=k$ $(1 \leqq k \leqq 2n)$ のものの個数は

k が偶数のとき　$\dfrac{[イ]k+[ウ]}{2}$ 個

k が奇数のとき　$\dfrac{[エ]k+[オ]}{2}$ 個である．

(3)　a_n を n の式で表すと，$a_n =$ [カ] n^2+ [キ] n である．

第 26 講　数列(4)

数列 $\{a_n\}$ は，関係式 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=6$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする．

$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき

(1)　$b_{n+1}=$ ア b_n+ イ が成り立つから，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$b_n=$ ウ・エ$^{n-1}-$ オ である．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$ カ・キ$^{n-1}-$ ク $n+$ ケ である．

第 27 講　高次方程式

a を正の定数とし，$P(x)=x^3+(4-a)x^2-\frac{7}{2}ax-\frac{a^2}{2}$ とする．

(1)　$a=2$ のとき，$P(x)=0$ の解は $x=$ ア ，イウ $\pm\sqrt{\text{エ}}$ である．

(2)　3 次方程式 $P(x)=0$ が実数解をただ 1 つもつとき，a の値の範囲は $a>$ オ である．

(3)　3 次方程式 $P(x)=0$ が異なる 3 つの整数解をもつとき，$a=$ カ であり，このときの整数解は小さい方から キク ，ケコ ，サ である．

第 28 講　証明(1)

x，y は実数とする．

「$x^2+y^2 \leqq 45$ ならば，$x^2+y^2-4x-2y \leqq k$ である」

が真の命題であるような定数 k の値の範囲は，k [ア] [イウ] である．

[ア] には，次の①～④のうちから，当てはまるものを選べ．

① ＞　② ≧　③ ＜　④ ≦

第 30 講　整数問題(1)

n を自然数とし，$T=n^{2000}+2$ とする．

(1)　T を 3 で割ったときの余りについて調べると，k を整数として

$n=3k$ のとき，　　余りは **ア**

$n=3k+1$ のとき，余りは **イ**

$n=3k-1$ のとき，余りは **ウ**

となる．

(2)　T が 6 の倍数になるような $n \geqq 2000$ を満たす自然数 n のうち，3 番目に小さいものは **エオカキ** である．

第 31 講　整数問題(2)

整数 x，y が $xy-2x-3y=0$　……①

を満たすとする．このとき，$\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)\left(y-\boxed{\text{イ}}\right)=\boxed{\text{ウ}}$

が成り立つから，①を満たす x，y の組 $(x,\ y)$ の個数は $\boxed{\text{エ}}$ である．

第32講　整数問題(3)

n を自然数とし，$A_n=2^n+n^2$ とする．

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のとき，A_n が3の倍数になるのは，$n=$ [ア]，[イ] のときである．ただし，[ア] < [イ] とする．

(2)　$A_{n+6}-A_n=$ [ウ]([エオ]$\cdot 2^n+$[カ]$n+$[キク]) であるから，$A_{n+6}-A_n$ は [ウ] の倍数である．

(3)　$1 \leqq n \leqq 2018$ のとき，A_n が3の倍数になるような n の個数は [ケコサ] 個である．

第 33 講　総合問題(1)

a を実数とする．x の 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1\leqq x\leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする．

(1)　$m\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である．

(2)　$m(a)$ を a の値で場合分けして求めると

$a\leqq -\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき　　$m(a)=\boxed{\text{キ}}\,a^2+\boxed{\text{ク}}\,a+\boxed{\text{ケ}}$

$-\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}<a\leqq\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき　　$m(a)=-\dfrac{a^2}{\boxed{\text{コ}}}+\boxed{\text{サ}}$

$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}<a$ のとき　　$m(a)=\boxed{\text{キ}}\,a^2-\boxed{\text{ク}}\,a+\boxed{\text{ケ}}$

第34講　総合問題(2)

1から9までの番号が書かれた玉が1個ずつ計9個ある．これらの玉を3個ずつ3つの箱A，B，Cに入れる．

(1) 箱Aにある玉の番号がいずれも3の倍数になるような玉の入れ方は **アイ** 通りある．

(2) 箱Aにある3個の玉の番号を3で割った余りがいずれも異なるような玉の入れ方は **ウエオ** 通りある．

(3) 箱Aにある3個の玉の番号の和が3の倍数になるような玉の入れ方は **カキク** 通りある．

(4) いずれの箱についても，3個の玉の番号の和が3の倍数になるような玉の入れ方は **ケコサ** 通りある．

第 35 講　総合問題(3)

原点を出発点とし，x 軸上を動く点Ｐがある．白玉 6 個と黒玉 4 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出す．取り出した玉が白玉であれば点Ｐは正の方向に 1 だけ進み，黒玉であれば点Ｐは負の方向に 1 だけ進むこととする．ただし，取り出した玉は袋に戻さない．

(1)　玉を 2 回取り出すとき，点Ｐが原点にある確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である．

(2)　玉を 8 回取り出すとき，点Ｐの座標が 2 である確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

(3)　玉を 6 回取り出すとき，2 回目かつ 6 回目で点Ｐが原点にある確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である．

(4)　玉を 6 回取り出すとき，6 回目で点Ｐの座標が初めて 4 となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシス}}}$ である．

第 36 講　総合問題(4)

正三角形 ABC が半径１の円に内接しているとする．P は点 A，B と異なる点で，A，B を両端とし点 C を含まない弧の上を動くものとする．

(1)　$\angle \mathrm{PBA}=\theta$ とおくとき，PA＝ ア ，PB＝ イ である．

ア ， イ には，当てはまるものを次の①～⑧のうちから選べ．

① $\sin\theta$　② $\cos\theta$　③ $2\sin\theta$　④ $2\cos\theta$

⑤ $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)$　⑥ $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$　⑦ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)$　⑧ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$

(2)　PA＋PB＋PC の最大値は ウ である．

(3)　$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2=$ エ である．

第 37 講　総合問題(5)

$f(x)=x^2+ax+b$ とし，放物線 $y=f(x)$ が，2 点 P$(-1,\ 1)$，Q$(1,\ 1)$ を結ぶ線分とただ 1 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の範囲を考える．

(1)　放物線 $y=f(x)$ が線分 PQ に接するとき，$b=\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}a^2+\boxed{\text{イ}}$ かつ $-2\leqq a\leqq 2$ を満たす．

(2)　放物線 $y=f(x)$ が線分 PQ にただ 1 点で交わるとき，a，b は次の条件を満たす．

(i)　$a>\boxed{\text{ウ}}$ のとき　　$\boxed{\text{エ}}\leqq b\leqq\boxed{\text{オ}}$

(ii)　$0<a\leqq\boxed{\text{ウ}}$ のとき　　$\boxed{\text{カ}}\leqq b<\boxed{\text{キ}}$

(iii)　$-\boxed{\text{ウ}}\leqq a<0$ のとき　　$b\geqq\boxed{\text{ク}}$ かつ $b<\boxed{\text{ケ}}$

(iv)　$a<-\boxed{\text{ウ}}$ のとき　　$b\geqq\boxed{\text{コ}}$ かつ $b\leqq\boxed{\text{サ}}$

$\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ は，①，②のうち適するものを選べ．

①　a　　　②　$-a$

第 38 講　総合問題(6)

関数 $f(x)=x(x^2+ax+b)$ において，$y=f(x)$ のグラフは点 A(1, 0) を通り，点 A に関して点対称である．

(1)　$a=$ **アイ**，$b=$ **ウ** である．

(2)　点 A を通る傾き m の直線を l とする．

直線 l が $y=f(x)$ のグラフと異なる 3 点で交わる条件は $m>$ **エオ** である．

(3)　$m>$ **エオ** のとき，直線 l と $y=f(x)$ のグラフで囲まれた 2 つの部分の面積の和が $\frac{3}{2}$ となるような m の値は $m=\sqrt{\boxed{カ}}-\boxed{キ}$ である．

第 39 講　総合問題(7)

平面上に，AB＝3，DC＝2 であり，辺 AB と辺 DC が平行な台形 ABCD がある．また，t を $0<t<1$ である実数とする．線分 BD を $t:(1-t)$ の比に内分する点を P とし，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする．

(1)　正の実数 s を BQ：BC＝s：1 で定めるとき，$\overrightarrow{AQ}=\left(\boxed{ア}-\dfrac{s}{\boxed{イ}}\right)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}$

(2)　(1)の s を t を用いて表すと，$s=\dfrac{\boxed{ウ}\,t}{\boxed{エ}-\boxed{オ}\,t}$ となる．

(3)　線分 PQ と線分 DC が共有点をもたない t の範囲は $\boxed{カ}<t<\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である．

第 40 講　総合問題(8)

数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$ であり，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$ に対して

$$5^{n-1}\times a_1+5^{n-2}\times a_2+\cdots\cdots+5\times a_{n-1}+a_n=0$$

を満たす．このとき

$a_2=-$ ［ア］

$a_n=$ ［イ］ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$

である．

第 41 講　総合問題(9)

$f(x)=|x^2-5x+4|+|x-1|$ とする．

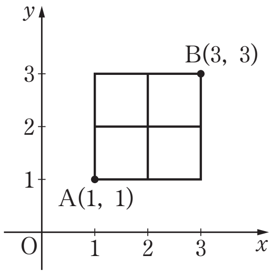
(1)　不等式 $f(x)\geqq 8$ の解は，$x\leqq$ ［ア］$-$［イ］$\sqrt{［ウ］}$，［エ］$\leqq x$ である．

(2)　実数 k に対して，x についての方程式 $f(x)=k$ が 4 個の実数解をもつとき，k のとり得る値の範囲は，［オ］$<k<$［カ］である．

(3)　$f(t)=f(t+1)$，$t>3$ を満たす実数 t の値は $t=\dfrac{［キ］+\sqrt{［ク］}}{［ケ］}$ である．

第42講　総合問題⑽

xy 平面上に右図のような道がある．点Pは最初Aにある．さいころを1回投げるたびに次の操作を行う．



・出た目が1，2，3のいずれかのとき，Pを x 軸の正の方向へ1進める．

・出た目が4，5のいずれかのとき，Pを y 軸の正の方向へ1進める．ただし，(i)や(ii)によりPが道の外へ出る場合には動かさない．

・出た目が6のとき，Pを動かさない．

(1)　さいころを4回投げたとき，PがBにある確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

(2)　さいころを5回投げたとき，6の目が1回だけ出てPがBにある確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ であり，6の目が1回も出ずにPがBにある確率は $\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{クケコ}}$ である．

したがって，さいころを5回投げたとき，PがBにある確率は $\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセ}}$ である．

第 43 講　総合問題(11)

平面上の三角形 ABC で，AB＝10，BC＝6，CA＝8，∠C＝90° であるものについて，外心を O，内心を I とし，O から I へのばした半直線と外接円との交点を M，I から O へのばした半直線と外接円との交点を N とする．

(1)　三角形 ABC の外接円の半径は［ア］，内接円の半径は［イ］である．

(2)　OI＝$\sqrt{［ウ］}$ である．

(3)　IM＝［エ］－$\sqrt{［オ］}$，IN＝［カ］＋$\sqrt{［キ］}$ である．

(4)　点 I を通る各直線 l に対し，l が三角形 ABC の外接円によって切り取られる線分の長さを d とする．このとき，d の最小値は［ク］$\sqrt{［ケ］}$ である．

第44講　総合問題⑿

2点A$(x,\ y)$，B$(X,\ Y)$が原点Oを通る同一直線上にある．OA・OB＝4を満たし，AとBは原点Oに対し反対側にある．

(1)　点A$(x,\ y)$をX，Yを用いて表すと，$x=-\dfrac{\boxed{\text{ア}}X}{X^2+Y^2}$，$y=-\dfrac{\boxed{\text{イ}}Y}{X^2+Y^2}$となる．

(2)　点Aが直線$y=-2x-2$上を動くとき

(i)　点Bの軌跡は，円$\left(x-\boxed{\text{ウ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{エ}}\right)^2=\boxed{\text{オ}}$（ただし，原点を除く）となる．

(ii)　$\dfrac{\text{OA}}{\text{AB}}$が最小となる点Aの座標は，$\left(-\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\ -\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$である．

第 45 講　総合問題⒀

2 つの箱 A，B があり，どちらの箱にも赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている．それぞれの箱から，無作為に玉を 1 個取り出し，取り出した玉を交換して箱に戻す操作を繰り返す．n 回の操作の後，箱 A，B のどちらにも赤玉，白玉が 1 個ずつ入っている確率を p_n とする．ただし，n を自然数とする．

(1)　$p_1=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$p_2=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

(2)　p_n と p_{n+1} の間に $p_{n+1}=\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}p_n+\boxed{ク}$ という関係が成り立つ．

よって，$p_n=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\left\{\boxed{サ}+\left(\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}\right)^n\right\}$ である．

第 46 講　総合問題⒁

$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$ かつ $4 \leqq xy \leqq 32$ とする．$\log_2 x = X$，$\log_2 y = Y$ とおくと

(1)　X のとり得る値の範囲は［ア］$\leqq X \leqq$［イ］である．

(2)　$k = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y$ とおくと，k のとり得る値の範囲は［ウ］$\leqq k \leqq$［エ］である．

第 47 講　総合問題⒂

xy 平面における 2 つの放物線 $C：y=(x-a)^2+b$，$D：y=-x^2$ を考える．

(1)　C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるとき，実数 a，b の満たす条件は $b=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}a^2-\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である．

(2)　実数 a，b が(1)の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線の式は，

$\boxed{カ}ax+\boxed{キ}y-a^2-b=0$ であり，この直線が通過する範囲は，

放物線 $y=\boxed{ク}x^2-\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ の $\boxed{サ}$ である．ただし，境界を含む．

$\boxed{サ}$ は，①，②のうち適するものを選べ．

①　上方　　　　　　②　下方

第 48 講　総合問題⒃

関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)\,dt$ を満たすとし，$\int_0^2 f(t)\,dt=a$ とおく．

(1)　$f(2)=$ ［ア］ $a+$ ［イ］ である．

(2)　$a=$ ［ウエ］ である．

(3)　k は定数とする．$y=xf(x)-k$ と $y=ax^2$ のグラフの共有点の個数は次のようになる．

$k<$ ［オ］，$\dfrac{［カ］}{［キ］}<k$ のとき，［ク］ 個

$k=$ ［オ］，$\dfrac{［カ］}{［キ］}$ のとき，［ケ］ 個

［オ］ $<k<\dfrac{［カ］}{［キ］}$ のとき，［コ］ 個

追加練習問題解答

第25講　数列(3)

n を整数とする．連立不等式 $\frac{1}{2}x \leqq y \leqq 2x$，$1 \leqq x \leqq 2n$ の表す領域を D とし，D の周上および内部にある格子点の個数を a_n とする．ただし，格子点とは，x 座標，y 座標がともに整数の点である．

(1)　$a_1 =$ **ア** である．

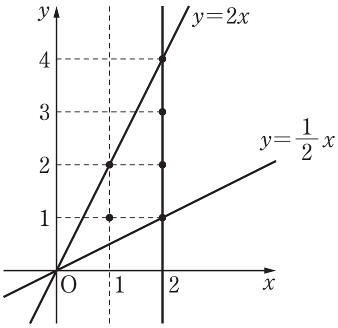
(2)　D の周上および内部にある格子点のうち，$x=k$ $(1 \leqq k \leqq 2n)$ のものの個数は

k が偶数のとき　$\dfrac{\boxed{イ}k+\boxed{ウ}}{2}$ 個

k が奇数のとき　$\dfrac{\boxed{エ}k+\boxed{オ}}{2}$ 個である．

(3)　a_n を n の式で表すと，$a_n = \boxed{カ}n^2 + \boxed{キ}n$ である．

解答例



(1)　$x=1$ 上の格子点は

$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$ の2個．

$x=2$ 上の格子点は

$(2,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(2,\ 4)$ の4個．

だから　$a_1 = 2+4 = \mathbf{6}$

(2)　以下，m を整数とする．

(i)　k が偶数のとき

$k=2m$ $(1 \leqq m \leqq n)$ とすると，$x=2m$ の格子点は，

y 座標が m，$m+1$，$m+2$，……，$4m$ のものがあるから，その個数は，

$$4m-m+1=3m+1$$
$$=3\cdot\frac{k}{2}+1=\frac{\mathbf{3k+2}}{2}\ (個)$$

(ii)　k が奇数のとき

$k=2m-1$ $(1 \leqq m \leqq n)$ とすると，$x=2m-1$ の格子点は，

y 座標が m，$m+1$，$m+2$，……，$4m-2$ のものがあるから，その個数は，

$$(4m-2)-m+1=3m-1$$
$$=3\cdot\frac{k+1}{2}-1=\frac{\mathbf{3k+1}}{2}\ (個)$$

(3)　(2)の結果から

$$a_n=\sum_{m=1}^{n}(3m+1)+\sum_{m=1}^{n}(3m-1)$$
$$=\sum_{m=1}^{n}6m$$
$$=6\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\mathbf{3n^2+3n}$$

第 26 講　数列(4)

数列 $\{a_n\}$ は，関係式 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=6$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を満たすとする．

$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき

(1)　$b_{n+1}=$ ア b_n+ イ が成り立つから，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$b_n=$ ウ・エ$^{n-1}-$ オ である．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$ カ・キ$^{n-1}-$ ク $n+$ ケ である．

解答例

(1)　$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$

$=(4a_{n+1}-3a_n+6)-a_{n+1}$

$=3(a_{n+1}-a_n)+6$

$=\mathbf{3}b_n+\mathbf{6}$

変形すると　$b_{n+1}+3=3(b_n+3)$

また　$b_1=a_2-a_1=1$

よって，数列 $\{b_n+3\}$ は，初項 $b_1+3=4$，公比 3 の等比数列だから

$b_n+3=4\cdot 3^{n-1}$

$b_n=\mathbf{4\cdot 3}^{n-1}\mathbf{-3}$

(2)　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4\cdot 3^{k-1}-3)$$

$$=1+\frac{4(3^{n-1}-1)}{3-1}-3(n-1)$$

$$=2\cdot 3^{n-1}-3n+2$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

よって　$a_n=\mathbf{2\cdot 3}^{n-1}\mathbf{-3}n\mathbf{+2}$

第27講　高次方程式

a を正の定数とし，$P(x)=x^3+(4-a)x^2-\frac{7}{2}ax-\frac{a^2}{2}$ とする．

(1)　$a=2$ のとき，$P(x)=0$ の解は $x=$ **ア** ，**イウ** $\pm\sqrt{\text{エ}}$ である．

(2)　3次方程式 $P(x)=0$ が実数解をただ1つもつとき，a の値の範囲は $a>$ **オ** である．

(3)　3次方程式 $P(x)=0$ が異なる3つの整数解をもつとき，$a=$ **カ** であり，このときの整数解は小さい方から **キク** ，**ケコ** ，**サ** である．

解答例

(1)　$a=2$ のとき，$P(x)=x^3+2x^2-7x-2=(x-2)(x^2+4x+1)$

$P(x)=0$ のとき　$(x-2)(x^2+4x+1)=0$

$x=2,\ x^2+4x+1=0$

よって　$x=\mathbf{2},\ \mathbf{-2\pm\sqrt{3}}$

(2)　$P(a)=a^3+(4-a)a^2-\frac{7}{2}a^2-\frac{a^2}{2}=0$ であるので，$P(x)$ は $x-a$ を因数にもつ．

$$P(x)=(x-a)\left(x^2+4x+\frac{a}{2}\right)$$

$P(x)=0$ のとき　$(x-a)\left(x^2+4x+\frac{a}{2}\right)=0$

$$x=a,\ x^2+4x+\frac{a}{2}=0 \quad \cdots\cdots①$$

$a>0$ より，①に $x=a$ を代入したとき (左辺) >0 となるので，①は $x=a$ を解にもたない．

よって，$P(x)=0$ が実数解をただ1つもつのは，①が虚数解をもつときである．

①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot\frac{a}{2}<0 \qquad \text{すなわち}\quad a>\mathbf{8}$$

(3)　$P(x)=0$ が異なる3つの整数解をもつとき，a は正の整数であり，①の2つの解は a 以外の異なる整数である．①の解は　$x=-2\pm\sqrt{4-\frac{a}{2}}=-2\pm\sqrt{\frac{8-a}{2}}$

これが異なる整数になるのは，$\frac{8-a}{2}=1$ のとき．すなわち　$a=\mathbf{6}$

このとき，3つの整数解は　$x=\mathbf{-3},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{6}$

第 28 講　証明(1)

x，y は実数とする．

「$x^2+y^2 \leqq 45$ ならば，$x^2+y^2-4x-2y \leqq k$ である」

が真の命題であるような定数 k の値の範囲は，k [ア] [イウ] である．

[ア] には，次の①～④のうちから，当てはまるものを選べ．

①　＞　　②　≧　　③　＜　　④　≦

解答例

$x^2+y^2 \leqq 45$　……①

$x^2+y^2-4x-2y \leqq k$ より　$(x-2)^2+(y-1)^2 \leqq k+5$　……②

与えられた命題が真となるのは，①の領域が②の領域に含まれるときである．

まず，②が領域をもつための条件は

$k+5>0$　　すなわち　$k>-5$　……③

また，2 円 $x^2+y^2=45$ と $(x-2)^2+(y-1)^2=k+5$ の中心間の距離は

$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

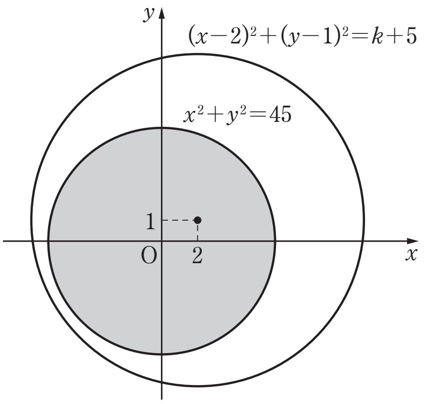
円 $x^2+y^2=45$ が円 $(x-2)^2+(y-1)^2=k+5$ に内接するとき

$\sqrt{k+5}-3\sqrt{5}=\sqrt{5}$ より　$\sqrt{k+5}=4\sqrt{5}$

両辺を 2 乗すると　$k+5=80$　　$k=75$

よって，求める条件は　$\boldsymbol{k \geqq 75}$

これは，③を満たす．



第 30 講　整数問題(1)

n を自然数とし，$T=n^{2000}+2$ とする．

(1)　T を 3 で割ったときの余りについて調べると，k を整数として

$n=3k$ のとき，　余りは [ア]

$n=3k+1$ のとき，余りは [イ]

$n=3k-1$ のとき，余りは [ウ]

となる．

(2)　T が 6 の倍数になるような $n\geqq 2000$ を満たす自然数 n のうち，3 番目に小さいものは [エオカキ] である．

解答例

(1)　(i)　$n=3k$ のとき

n^{2000} は 3 の倍数だから，T を 3 で割ったときの余りは　**2**

(ii)　$n=3k+1$ のとき

$$n^{2000}=(3k+1)^{2000}$$
$$=(3k)^{2000}+{}_{2000}\mathrm{C}_1(3k)^{1999}+{}_{2000}\mathrm{C}_2(3k)^{1998}+\cdots\cdots+{}_{2000}\mathrm{C}_{1999}\cdot 3k+1$$

よって，整数 m_1 を用いて，$n^{2000}=3m_1+1$ と表されるので

$$T=3m_1+3=3(m_1+1)$$

したがって，T を 3 で割ったときの余りは　**0**

(iii)　$n=3k-1$ のとき

$$n^{2000}=(3k-1)^{2000}$$
$$=(3k)^{2000}-{}_{2000}\mathrm{C}_1(3k)^{1999}+{}_{2000}\mathrm{C}_2(3k)^{1998}-\cdots\cdots-{}_{2000}\mathrm{C}_{1999}\cdot 3k+1$$

よって，整数 m_2 を用いて，$n^{2000}=3m_2+1$ と表されるので

$$T=3m_2+3=3(m_2+1)$$

したがって，T を 3 で割ったときの余りは　**0**

(2)　T が 6 の倍数になるのは，T が偶数でかつ 3 の倍数になる場合である．

T が偶数のとき，n は偶数　……①

T が 3 の倍数のとき，(1)より，n は 3 の倍数ではない．　……②

①，②を満たす 2000 以上の n は

2000，2002，2006，……

であるから，3 番目に小さい数は　**2006**

第 31 講　整数問題(2)

> 整数 x，y が $xy-2x-3y=0$　……①
> を満たすとする．このとき，$\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)\left(y-\boxed{\text{イ}}\right)=\boxed{\text{ウ}}$
> が成り立つから，①を満たす x，y の組 $(x,\ y)$ の個数は $\boxed{\text{エ}}$ である．

解答例

$xy-2x-3y=0$　……①

$(x-\mathbf{3})(y-\mathbf{2})=\mathbf{6}$　……①′

x，y は整数であるから，$x-3$，$y-2$ も整数である．

よって，①′ を満たす $x-3$，$y-2$ の組は次のようになる．

$x-3$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
$y-2$	6	3	2	1	-6	-3	-2	-1

したがって，①を満たす x，y の組は

x	4	5	6	9	2	1	0	-3
y	8	5	4	3	-4	-1	0	1

すなわち，全部で **8** 個である．

第 32 講　整数問題(3)

n を自然数とし，$A_n=2^n+n^2$ とする．

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のとき，A_n が 3 の倍数になるのは，$n=$ **ア** ，**イ** のときである．ただし，**ア** ＜ **イ** とする．

(2)　$A_{n+6}-A_n=$ **ウ** (**エオ** $\cdot 2^n+$ **カ** $n+$ **キク**) であるから，$A_{n+6}-A_n$ は **ウ** の倍数である．

(3)　$1\leqq n\leqq 2018$ のとき，A_n が 3 の倍数になるような n の個数は **ケコサ** 個である．

解答例

(1)　$A_n=2^n+n^2$ において

$A_1=2^1+1^2=3,\ A_2=2^2+2^2=8,\ A_3=2^3+3^2=17$

$A_4=2^4+4^2=32,\ A_5=2^5+5^2=57,\ A_6=2^6+6^2=100$

このうち，A_n が 3 の倍数であるのは A_1，A_5 である．

よって，求める n の値は　$n=\mathbf{1},\ \mathbf{5}$

(2)　$A_{n+6}-A_n=2^{n+6}+(n+6)^2-(2^n+n^2)$

$=2^n\cdot 2^6+n^2+12n+36-2^n-n^2$

$=63\cdot 2^n+12n+36$

$=\mathbf{3(21\cdot 2^n+4n+12)}$

$21\cdot 2^n+4n+12$ は整数であるから，$A_{n+6}-A_n$ は 3 の倍数である．

(3)　(2)より，$A_{n+6}-A_n$ は 3 の倍数であるから，

A_n と A_{n+6} をそれぞれ 3 で割ったときの余りは等しい．

よって，A_n が 3 の倍数のとき，A_{n+6} も 3 の倍数となる．

(1)より，A_1，A_5 は 3 の倍数であるから，n が

$1,\ 7,\ 13,\ \cdots$

および　$5,\ 11,\ 17,\ \cdots$

のとき，A_n は 3 の倍数となる．

$1\leqq n\leqq 2018$ の範囲で，このような n の値を調べると

・$6\cdot 0+1,\ 6\cdot 1+1,\ 6\cdot 2+1,\ \cdots,\ 6\cdot 336+1\ (=2017)$

・$6\cdot 0+5,\ 6\cdot 1+5,\ 6\cdot 2+5,\ \cdots,\ 6\cdot 335+5\ (=2015)$

以上により，求める n の個数は

$337+336=\mathbf{673}$（個）

第 33 講　総合問題(1)

a を実数とする．x の 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1 \leqq x \leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする．

(1)　$m\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である．

(2)　$m(a)$ を a の値で場合分けして求めると

$a \leqq -\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ のとき　$m(a)=\boxed{キ}a^2+\boxed{ク}a+\boxed{ケ}$

$-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}<a \leqq \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ のとき　$m(a)=-\frac{a^2}{\boxed{コ}}+\boxed{サ}$

$\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}<a$ のとき　$m(a)=\boxed{キ}a^2-\boxed{ク}a+\boxed{ケ}$

解答例

(1)　$a=\frac{1}{2}$ のとき

$$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+1=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}$$

$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ の範囲で $f(x)$ は，$x=-\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\frac{15}{16}$ をとる．

よって　$m\left(\frac{1}{2}\right)=\mathbf{\frac{15}{16}}$

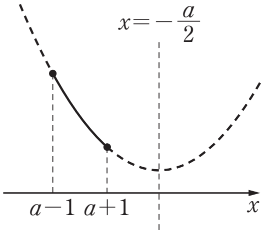
(2)　$f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+1$

$y=f(x)$ のグラフの軸は $x=-\frac{a}{2}$ である．

(i)　$a+1 \leqq -\frac{a}{2}$，すなわち $a \leqq -\frac{2}{3}$ のとき

$x=a+1$ で最小となるから

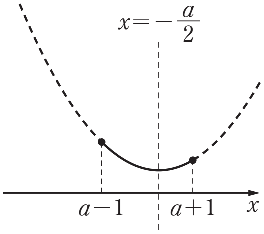
$$\begin{aligned} m(a)&=f(a+1)\\ &=(a+1)^2+a(a+1)+1\\ &=2a^2+3a+2 \end{aligned}$$

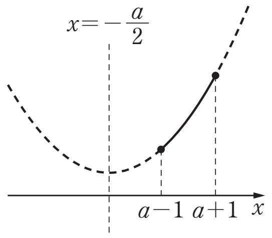


(ii)　$a-1 \leqq -\frac{a}{2}<a+1$，すなわち $-\frac{2}{3}<a \leqq \frac{2}{3}$ のとき

$x=-\frac{a}{2}$ で最小となるから

$$m(a)=f\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}+1$$





(iii)　$-\frac{a}{2}<a-1$，すなわち $a>\frac{2}{3}$ のとき

$x=a-1$ で最小となるから

$$m(a)=f(a-1)$$
$$=(a-1)^2+a(a-1)+1$$
$$=2a^2-3a+2$$

(i)〜(iii)より，$m(a)$ は次のようになる．

$a\leqq-\frac{2}{3}$ のとき　　$m(a)=\mathbf{2a^2+3a+2}$

$-\frac{2}{3}<a\leqq\frac{2}{3}$ のとき　$m(a)=-\frac{a^2}{4}+1$

$\frac{2}{3}<a$ のとき　　$m(a)=2a^2-3a+2$

第34講　総合問題(2)

1から9までの番号が書かれた玉が1個ずつ計9個ある．これらの玉を3個ずつ3つの箱A，B，Cに入れる．

(1)　箱Aにある玉の番号がいずれも3の倍数になるような玉の入れ方は **アイ** 通りある．

(2)　箱Aにある3個の玉の番号を3で割った余りがいずれも異なるような玉の入れ方は **ウエオ** 通りある．

(3)　箱Aにある3個の玉の番号の和が3の倍数になるような玉の入れ方は **カキク** 通りある．

(4)　いずれの箱についても，3個の玉の番号の和が3の倍数になるような玉の入れ方は **ケコサ** 通りある．

解答例

(1)　箱Aには3，6，9と書かれた玉が入る．残りの6個の玉を3個ずつB，Cに入れる方法は　${}_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=$**20**（通り）

(2)　箱Aに入る3個の玉の番号を3で割った余りがいずれも異なるのは，(1，4，7)，(2，5，8)，(3，6，9)の3組の中から1つずつ選んでAに入れる場合である．その選び方は

$3^3=27$（通り）

その各々に対して，残りの6個の玉をB，Cに入れる方法が${}_6C_3$通りある．

よって，求める入れ方の数は　$27\times{}_6C_3=27\times20=$**540**（通り）

(3)　箱Aに入る3個の玉の番号の和が3の倍数になるのは，次の場合である．

(i)　3個の玉の番号を3で割った余りがすべて等しい

(ii)　3個の玉の番号を3で割った余りがいずれも異なる

(i)のとき，Aに入れる3つの玉の選び方は(1，4，7)，(2，5，8)，(3，6，9)の3通りあるので，A，B，Cの入れ方の数は　$3\times{}_6C_3=3\times20=60$（通り）

(ii)のとき，A，B，Cの入れ方の数は，(2)より　540通り．

よって，求める入れ方の数は　$60+540=$**600**（通り）

(4)　いずれの箱についても，3個の玉の番号の和が3の倍数になるのは，次の場合である．

(ア)　A，B，Cどの箱についても(i)を満たす

(イ)　A，B，Cどの箱についても(ii)を満たす

A	B	C
1	4	7
2	5	8
3	6	9

(ア)のとき，A，B，Cの箱には(1，4，7)，(2，5，8)，(3，6，9)が順不同で入るので，その入れ方の数は　$3!=6$（通り）

(イ)のとき，(1，4，7)のそれぞれをA，B，Cに入れ，(2，5，8)，(3，6，9)についても同様にA，B，Cに入れるので，その入れ方の数は

$(3!)^3=6^3=216$（通り）

よって，求める入れ方の数は　$6+216=$**222**（通り）

第35講　総合問題(3)

原点を出発点とし，x 軸上を動く点Ｐがある．白玉６個と黒玉４個が入っている袋から玉を１個ずつ取り出す．取り出した玉が白玉であれば点Ｐは正の方向に１だけ進み，黒玉であれば点Ｐは負の方向に１だけ進むこととする．ただし，取り出した玉は袋に戻さない．

(1)　玉を２回取り出すとき，点Ｐが原点にある確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である．

(2)　玉を８回取り出すとき，点Ｐの座標が２である確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

(3)　玉を６回取り出すとき，２回目かつ６回目で点Ｐが原点にある確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である．

(4)　玉を６回取り出すとき，６回目で点Ｐの座標が初めて４となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシス}}}$ である．

解答例

(1)　玉を２回取り出したとき，点Ｐが原点にあるのは，白玉，黒玉を１回ずつ取り出すときである．その確率は

$$\frac{(6\cdot 4)\times 2}{{}_{10}\mathrm{P}_2}=\frac{6\cdot 4\cdot 2}{10\cdot 9}=\mathbf{\frac{8}{15}}$$

(2)　玉を８回取り出したとき，点Ｐの座標が２であるのは，白玉を５回，黒玉を３回取り出すときである．その確率は

$$\frac{({}_6\mathrm{P}_5\cdot{}_4\mathrm{P}_3)\times{}_8\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{P}_8}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\times 4\cdot 3\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\times\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=\mathbf{\frac{8}{15}}$$

(3)　玉を６回取り出したとき，２回目と６回目に点Ｐが原点にあるのは，はじめの２回で白玉と黒玉を取り出し，次の４回で白玉と黒玉を２回ずつ取り出すときである．(1)の結果を利用すると，求める確率は

$$\frac{8}{15}\times\frac{({}_5\mathrm{P}_2\cdot{}_3\mathrm{P}_2)\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{P}_4}=\frac{8}{15}\times\frac{5\cdot 4\times 3\cdot 2\times 6}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}=\mathbf{\frac{8}{35}}$$

(4)　玉を６回取り出したとき，６回目に初めて点Ｐの座標が４になるのは，はじめの４回で，白玉を３回，黒玉を１回取り出し，次の２回で両方白玉を取り出すときである．その確率は

$$\frac{({}_6\mathrm{P}_3\cdot{}_4\mathrm{P}_1)\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{P}_4}\times\frac{{}_3\mathrm{P}_2}{{}_6\mathrm{P}_2}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\times 4\times 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}\times\frac{3\cdot 2}{6\cdot 5}=\mathbf{\frac{8}{105}}$$

第36講　総合問題(4)

正三角形 ABC が半径１の円に内接しているとする．P は点 A，B と異なる点で，A，B を両端とし点 C を含まない弧の上を動くものとする．

(1)　$\angle \mathrm{PBA}=\theta$ とおくとき，$\mathrm{PA}=$ [ア]，$\mathrm{PB}=$ [イ] である．

[ア]，[イ] には，当てはまるものを次の①～⑧のうちから選べ．

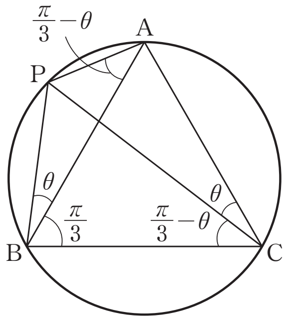
①　$\sin\theta$　②　$\cos\theta$　③　$2\sin\theta$　④　$2\cos\theta$

⑤　$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)$　⑥　$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$　⑦　$2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)$　⑧　$2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$

(2)　$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}$ の最大値は [ウ] である．

(3)　$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2=$ [エ] である．

解答例



(1)　$\angle \mathrm{PBA}=\angle \mathrm{PCA}=\theta$ より　$\angle \mathrm{PAB}=\angle \mathrm{PCB}=\dfrac{\pi}{3}-\theta$

$\triangle \mathrm{APB}$ において，正弦定理より　$\dfrac{\mathrm{PA}}{\sin\theta}=\dfrac{\mathrm{PB}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}=2$

よって　$\mathrm{PA}=2\sin\theta$　(③)，$\mathrm{PB}=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$　(⑧)

(2)　$\angle \mathrm{PBC}=\dfrac{\pi}{3}+\theta$ である．$\triangle \mathrm{PBC}$ において正弦定理より

$$\frac{\mathrm{PC}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right)}=2 \qquad \mathrm{PC}=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}&=2\sin\theta+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\\&=2\sin\theta+4\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta\\&=2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta\\&=4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\dfrac{\pi}{3}<\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2}{3}\pi$

よって，$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}$ は $\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，最大値 **4** をとる．

(3) $PA^2+PB^2+PC^2$

$=4\left\{\sin^2\theta+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right\}$

$=4\left\{\sin^2\theta+\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta\right)^2\right\}$

$=4\left\{\sin^2\theta+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2\right\}$

$=4\left(\sin^2\theta+\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta+\frac{3}{4}\cos^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)$

$=4\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta+\frac{3}{2}\cos^2\theta\right)$

$=6(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=\mathbf{6}$

第37講　総合問題(5)

$f(x)=x^2+ax+b$ とし，放物線 $y=f(x)$ が，2点 P$(-1,\ 1)$，Q$(1,\ 1)$ を結ぶ線分とただ1つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の範囲を考える．

(1)　放物線 $y=f(x)$ が線分 PQ に接するとき，$b=\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}a^2+\boxed{\text{イ}}$ かつ $-2\leqq a\leqq 2$ を満たす．

(2)　放物線 $y=f(x)$ が線分 PQ にただ1点で交わるとき，a，b は次の条件を満たす．

(i)　$a>\boxed{\text{ウ}}$ のとき　　$\boxed{\text{エ}}\leqq b\leqq\boxed{\text{オ}}$

(ii)　$0<a\leqq\boxed{\text{ウ}}$ のとき　　$\boxed{\text{カ}}\leqq b<\boxed{\text{キ}}$

(iii)　$-\boxed{\text{ウ}}\leqq a<0$ のとき　　$b\geqq\boxed{\text{ク}}$ かつ $b<\boxed{\text{ケ}}$

(iv)　$a<-\boxed{\text{ウ}}$ のとき　　$b\geqq\boxed{\text{コ}}$ かつ $b\leqq\boxed{\text{サ}}$

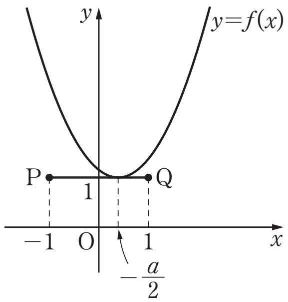
$\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ は，①，②のうち適するものを選べ．

①　a　　　②　$-a$

解答例

$$f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$$

放物線 $y=f(x)$ の軸は，直線 $x=-\dfrac{a}{2}$ である．



(1)　放物線 $y=f(x)$ が線分 PQ に接するのは，頂点が線分 PQ 上にあるときである．

したがって　$-1\leqq-\dfrac{a}{2}\leqq 1$ かつ $b-\dfrac{a^2}{4}=1$

すなわち　$b=\dfrac{1}{\mathbf{4}}a^2+\mathbf{1}$，$-2\leqq a\leqq 2$

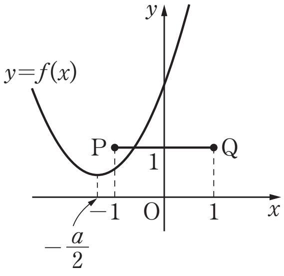
(2)　放物線 $y=f(x)$ が線分 PQ にただ1点で交わるとき，軸の位置で，次のように場合分けをして調べる．

(i)　$-\dfrac{a}{2}<-1$，すなわち $a>\mathbf{2}$ のとき

$f(-1)=-a+b+1\leqq 1$

$f(1)=a+b+1\geqq 1$

よって　$-a\leqq b\leqq a$　(**②**，**①**)

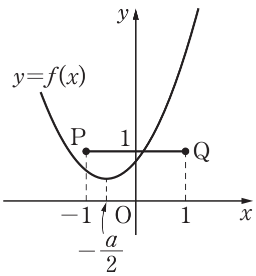


(ii)　$-1\leqq-\dfrac{a}{2}<0$，すなわち $0<a\leqq 2$ のとき

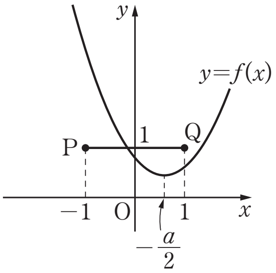
$f(-1)=-a+b+1<1$

$f(1)=a+b+1\geqq 1$

よって　$-a\leqq b<a$　(**②**，**①**)



(iii)　$0<-\dfrac{a}{2}\leqq 1$，すなわち $-2\leqq a<0$ のとき

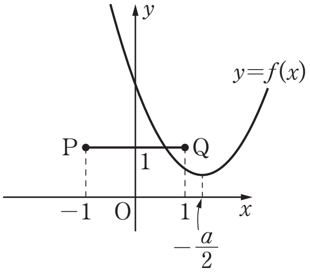


$f(-1)=-a+b+1\geqq 1$

$f(1)=a+b+1<1$

よって　$b\geqq a$ かつ $b<-a$　(①，②)

(iv)　$-\dfrac{a}{2}>1$，すなわち $a<-2$ のとき



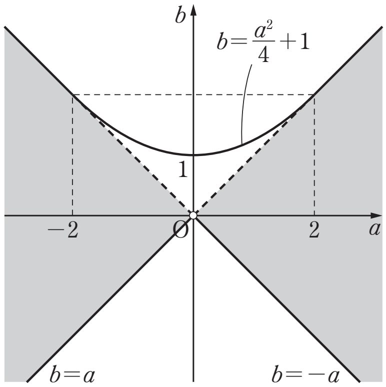
$f(-1)=-a+b+1\geqq 1$

$f(1)=a+b+1\leqq 1$

よって　$b\geqq a$ かつ $b\leqq -a$　(①，②)

(1)および(i)〜(iv)により，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は，$-2\leqq a\leqq 2$ における放物線 $b=\dfrac{1}{4}a^2+1$ と，右の図の影のついた部分である．

ただし，境界は実線部分を含み，原点と破線部分は含まない．



第38講　総合問題(6)

関数 $f(x)=x(x^2+ax+b)$ において，$y=f(x)$ のグラフは点 A(1, 0) を通り，点 A に関して点対称である．

(1) $a=$ **アイ**，$b=$ **ウ** である．

(2) 点 A を通る傾き m の直線を l とする．

直線 l が $y=f(x)$ のグラフと異なる3点で交わる条件は $m>$ **エオ** である．

(3) $m>$ **エオ** のとき，直線 l と $y=f(x)$ のグラフで囲まれた2つの部分の面積の和が $\frac{3}{2}$ となるような m の値は $m=\sqrt{\boxed{カ}}-\boxed{キ}$ である．

解答例

(1) $y=f(x)$ のグラフは点 (1, 0) を通るので

$$f(1)=1+a+b=0 \quad \cdots\cdots ①$$

また，$y=f(x)$ のグラフは原点 O を通り，この点と点 A に関して対称な点 (2, 0) も通るから　$f(2)=2(4+2a+b)=0 \quad \cdots\cdots ②$

①，②より　$a=-3$，$b=2$

このとき　$f(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$

$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動した式を $g(x)$ とすると

$$g(x)=f(x+1)=(x+1)x(x-1)$$
$$=x^3-x$$

これは奇関数より，グラフは原点対称．

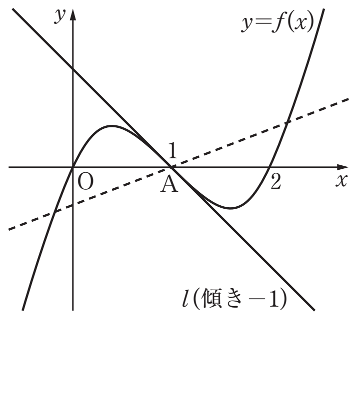
よって，$f(x)$ は点 A(1, 0) に関して点対称である．

以上により　$\boldsymbol{a=-3}$，$\boldsymbol{b=2}$

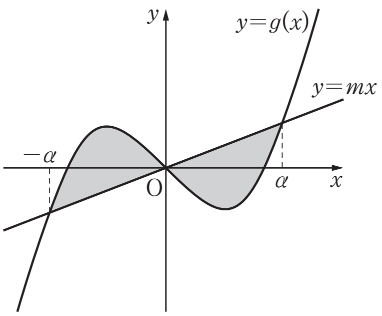
(2) $f'(x)=3x^2-6x+2$ より

$$f'(1)=-1$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの対称点 A を通る直線 l が $y=f(x)$ のグラフと3点で交わるのは，$\boldsymbol{m>-1}$ のとき．



(3)　題意の面積は，$y=g(x)$ のグラフと原点を通る傾き m の直線 $y=mx$ で囲まれた部分の面積である．



$g(x)=mx$　　つまり　$x^3-(m+1)x=0$

$x\{x^2-(m+1)\}=0$

$x=0,\ \pm\sqrt{m+1}\quad(m>-1)$

$\alpha=\sqrt{m+1}$ とおくと，交点の x 座標は

$x=-\alpha,\ 0,\ \alpha$

グラフの対称性より

$$\int_0^\alpha\{mx-(x^3-x)\}\,dx=\frac{3}{4}$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{m+1}{2}x^2\right]_0^\alpha=\frac{3}{4}$$

$$-\frac{1}{4}\alpha^4+\frac{m+1}{2}\alpha^2=\frac{3}{4}$$

$$\alpha^4-2(m+1)\alpha^2=-3$$

つまり　$(m+1)^2-2(m+1)^2=-3$

$(m+1)^2=3$

$m>-1$ より　$m+1=\sqrt{3}$

$m=\mathbf{\sqrt{3}-1}$

第39講　総合問題(7)

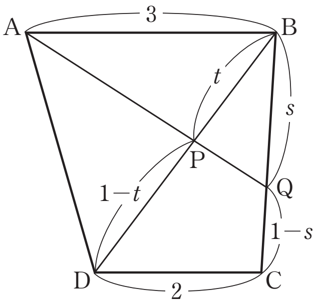
平面上に，AB＝3，DC＝2であり，辺ABと辺DCが平行な台形ABCDがある．また，tを$0<t<1$である実数とする．線分BDを$t:(1-t)$の比に内分する点をPとし，直線APと直線BCの交点をQとする．

(1)　正の実数sをBQ：BC＝s：1で定めるとき，$\overrightarrow{AQ}=\left(\boxed{ア}-\dfrac{s}{\boxed{イ}}\right)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}$

(2)　(1)のsをtを用いて表すと，$s=\dfrac{\boxed{ウ}\,t}{\boxed{エ}-\boxed{オ}\,t}$となる．

(3)　線分PQと線分DCが共有点をもたないtの範囲は$\boxed{カ}<t<\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$である．

解答例



(1)　AB∥DC，AB：DC＝3：2より　$\overrightarrow{DC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AQ}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$$

$$=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\left(\mathbf{1}-\frac{s}{\mathbf{3}}\right)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}\quad\cdots\cdots①$$

(2)　$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}\quad\cdots\cdots②$

$\overrightarrow{AP}\,/\!/\,\overrightarrow{AQ}$であるから，①，②より

$$\left(1-\frac{s}{3}\right):s=(1-t):t$$

$$s(1-t)=t\left(1-\frac{s}{3}\right)\qquad(1-t)s=t-\frac{st}{3}\qquad\left(1-\frac{2}{3}t\right)s=t\qquad\frac{3-2t}{3}s=t$$

$0<t<1$より，$3-2t\neq0$であるから　$s=\dfrac{\mathbf{3}t}{\mathbf{3}-\mathbf{2}t}$

(3)　線分PQと線分DCが共有点をもたないのは，点Qが，両端を除く辺BC上にあるときで，その条件は　$0<s<1$，すなわち　$0<\dfrac{3t}{3-2t}<1$

$3-2t>0$より　$0<3t<3-2t$

これを満たすtの値の範囲は　$\mathbf{0}<t<\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$

第 40 講　総合問題(8)

数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$ であり，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$ に対して

$$5^{n-1}\times a_1+5^{n-2}\times a_2+\cdots\cdots+5\times a_{n-1}+a_n=0$$

を満たす．このとき

$a_2=-$ ア

$a_n=$ イ　$(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$

である．

解答例

$S_n=5^{n-1}\times a_1+5^{n-2}\times a_2+\cdots\cdots+5\times a_{n-1}+a_n$ とおく．

$S_2=0$ より　$5\times a_1+a_2=0$

$a_1=1$ より　$5+a_2=0$

$a_2=-\mathbf{5}$

次に，$n\geqq 2$ のとき

$S_{n+1}=5^n\times a_1+5^{n-1}\times a_2+\cdots\cdots+5\times a_n+a_{n+1}$　……①

$5S_n=5^n\times a_1+5^{n-1}\times a_2+\cdots\cdots+5\times a_n$　……②

①－②より

$S_{n+1}-5S_n=a_{n+1}$

$S_n=S_{n+1}=0$ より　$a_{n+1}=0$

すなわち，$n\geqq 3$ のとき　$a_n=\mathbf{0}$

第 41 講　総合問題(9)

$f(x)=|x^2-5x+4|+|x-1|$ とする.

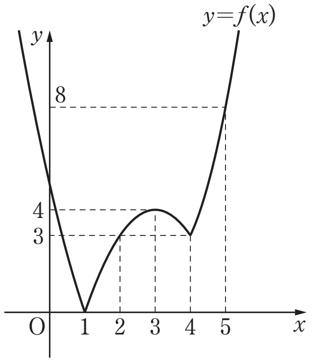
(1)　不等式 $f(x)\geqq 8$ の解は，$x\leqq \boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$，$\boxed{\text{エ}}\leqq x$ である.

(2)　実数 k に対して，x についての方程式 $f(x)=k$ が 4 個の実数解をもつとき，k のとり得る値の範囲は，$\boxed{\text{オ}}<k<\boxed{\text{カ}}$ である.

(3)　$f(t)=f(t+1)$，$t>3$ を満たす実数 t の値は $t=\dfrac{\boxed{\text{キ}}+\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である.

解答例

(1)　$f(x)=|x^2-5x+4|+|x-1|=|(x-1)(x-4)|+|x-1|$



(i)　$x\leqq 1$ のとき

$f(x)=(x^2-5x+4)-(x-1)=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$

(ii)　$1\leqq x\leqq 4$ のとき

$f(x)=-(x^2-5x+4)+(x-1)=-x^2+6x-5$

$\quad=-(x-3)^2+4$

(iii)　$4\leqq x$ のとき

$f(x)=(x^2-5x+4)+(x-1)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる.

$f(x)=8$ となる x は，$x\leqq 1$，$4\leqq x$の範囲にそれぞれ 1 つずつ存在する.

$x\leqq 1$ のとき，$f(x)=(x-3)^2-4=8$　　$(x-3)^2=12$　　$x=3-2\sqrt{3}$

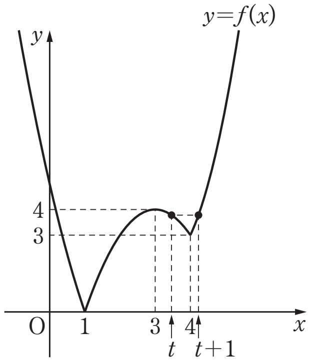
$4\leqq x$ のとき，$f(x)=(x-2)^2-1=8$　　$(x-2)^2=9$　　$x=5$

よって，$f(x)\geqq 8$ の解は　$x\leqq \mathbf{3-2\sqrt{3}}$，$\mathbf{5}\leqq x$

(2)　$f(x)=k$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数に等しい.

この共有点が 4 個になるときの k の値の範囲を求めると　$\mathbf{3<k<4}$

(3)　$f(t)=f(t+1)$，$t>3$ を満たす t は，右図のように $3<x<4$ の範囲に 1 つだけ存在する.



このとき

$f(t)=-t^2+6t-5$

$f(t+1)=(t+1)^2-4(t+1)+3=t^2-2t$

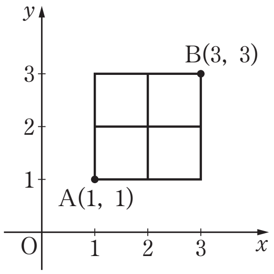
よって　$-t^2+6t-5=t^2-2t$

$2t^2-8t+5=0$

$3<t<4$ より　$t=\dfrac{\mathbf{4+\sqrt{6}}}{\mathbf{2}}$

第42講　総合問題⑽

xy 平面上に右図のような道がある．点Pは最初Aにある．さいころを1回投げるたびに次の操作を行う．



- 出た目が1，2，3のいずれかのとき，Pを x 軸の正の方向へ1進める．
- 出た目が4，5のいずれかのとき，Pを y 軸の正の方向へ1進める．ただし，(i)や(ii)によりPが道の外へ出る場合には動かさない．
- 出た目が6のとき，Pを動かさない．

(1)　さいころを4回投げたとき，PがBにある確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

(2)　さいころを5回投げたとき，6の目が1回だけ出てPがBにある確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ であり，6の目が1回も出ずにPがBにある確率は $\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{クケコ}}$ である．

　したがって，さいころを5回投げたとき，PがBにある確率は $\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセ}}$ である．

解答例

(1)　さいころを1回投げるとき，事象 X，Y，Z を次のように定める．

X：出た目が1，2，3のいずれかである

Y：出た目が4，5のいずれかである

Z：出た目が6である

このとき，$P(X)=\dfrac{1}{2}$，$P(Y)=\dfrac{1}{3}$，$P(Z)=\dfrac{1}{6}$ である．

さいころを4回投げたとき，PがBにあるのは，4回のうち X，Y が2回ずつ起こる場合である．

したがって，求める確率は，

$$\frac{4!}{2!2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

(2)　(i)　さいころを5回投げたとき，6の目が1回だけ出てPがBにある場合

これは，5回のうち X，Y が2回ずつ，Z が1回だけ起こる場合である．

したがって，求める確率は，

$$\frac{5!}{2!2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=30\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{5}{36}}$$

(ii)　さいころを5回投げたとき，6の目が1回も出ずにPがBにある場合

これは，次の2つの場合がある．

(ア)　5 回のうち X が 3 回，Y が 2 回起こるとき

確率は，$\dfrac{5!}{3!2!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=10\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{5}{36}$

(イ)　5 回のうち X が 2 回，Y が 3 回起こるとき

確率は，$\dfrac{5!}{2!3!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=10\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{27}=\dfrac{5}{54}$

よって，6 の目が 1 回も出ずにＰがＢにある確率は

$$\frac{5}{36}+\frac{5}{54}=\mathbf{\frac{25}{108}}$$

(ⅰ)，(ⅱ)より，さいころを 5 回投げたとき，ＰがＢにある確率は

$$\frac{5}{36}+\frac{25}{108}=\frac{40}{108}=\mathbf{\frac{10}{27}}$$

第43講　総合問題⑾

平面上の三角形ABCで，AB＝10，BC＝6，CA＝8，∠C＝90° であるものについて，外心をO，内心をIとし，OからIへのばした半直線と外接円との交点をM，IからOへのばした半直線と外接円との交点をNとする．

⑴　三角形ABCの外接円の半径は［ア］，内接円の半径は［イ］である．

⑵　$\mathrm{OI}=\sqrt{\boxed{ウ}}$ である．

⑶　$\mathrm{IM}=\boxed{エ}-\sqrt{\boxed{オ}}$，$\mathrm{IN}=\boxed{カ}+\sqrt{\boxed{キ}}$ である．

⑷　点Iを通る各直線 l に対し，l が三角形ABCの外接円によって切り取られる線分の長さを d とする．このとき，d の最小値は $\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}$ である．

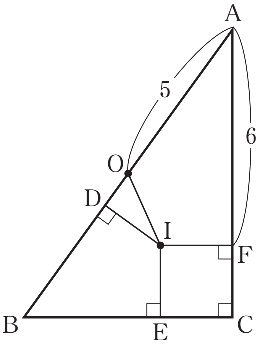
解答例

⑴　△ABCは ∠C＝90° の直角三角形であるから，ABが外接円の直径であり，線分ABの中点が外心Oとなる．よって，外接円の半径は　**5**

次に　$\triangle\mathrm{ABC}=6\times8\times\dfrac{1}{2}=24$

また，内接円の半径を r とすると，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{r}{2}(10+8+6)=12r$ であるから

$12r=24\qquad r=\mathbf{2}$



⑵　Iから辺AB，BC，CAに垂線ID，IE，IFを引くと，

ID＝IE＝IF＝2より　AF＝AD＝6

OD＝AD－AO＝1

△ODIにおいて

$\mathrm{OI}=\sqrt{1+4}=\sqrt{\mathbf{5}}$

⑶　$\mathrm{IM}=\mathrm{OM}-\mathrm{OI}=\mathbf{5}-\sqrt{\mathbf{5}}$

$\mathrm{IN}=\mathrm{IO}+\mathrm{ON}=\mathbf{5}+\sqrt{\mathbf{5}}$

⑷　直線 l と△ABCの外接円との交点をP，Qとする．

方べきの定理より

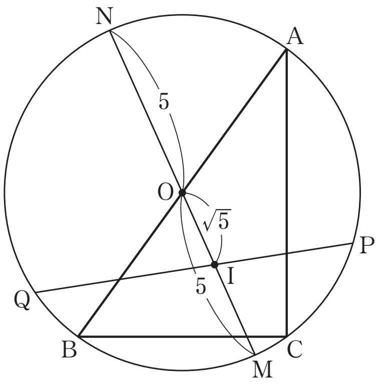
$\mathrm{IP}\times\mathrm{IQ}=\mathrm{IM}\times\mathrm{IN}=(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})=20$

相加平均と相乗平均の関係により

$d=\mathrm{IP}+\mathrm{IQ}\geqq2\sqrt{\mathrm{IP}\times\mathrm{IQ}}=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}$

等号が成り立つのは，IP＝IQのときであり，

このとき，d は最小値 $\mathbf{4\sqrt{5}}$ をとる．



第44講　総合問題⑿

2点 A$(x,\ y)$，B$(X,\ Y)$ が原点 O を通る同一直線上にある．OA・OB＝4 を満たし，A と B は原点 O に対し反対側にある．

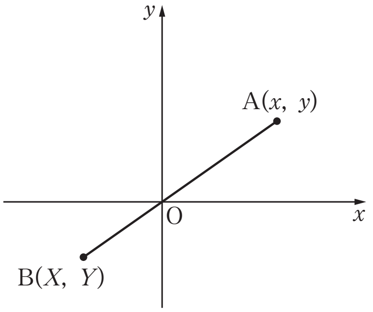
(1)　点 A$(x,\ y)$ を X，Y を用いて表すと，$x=-\dfrac{\boxed{ア}X}{X^2+Y^2}$，$y=-\dfrac{\boxed{イ}Y}{X^2+Y^2}$ となる．

(2)　点 A が直線 $y=-2x-2$ 上を動くとき

(i)　点 B の軌跡は，円 $\left(x-\boxed{ウ}\right)^2+\left(y-\boxed{エ}\right)^2=\boxed{オ}$（ただし，原点を除く）となる．

(ii)　$\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}}$ が最小となる点 A の座標は，$\left(-\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}},\ -\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\right)$ である．

解答例



(1)　OA$=a$，OB$=b$ とすると，$ab=4$　つまり　$a=\dfrac{4}{b}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\frac{a}{b}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\frac{4}{b^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって　$(x,\ y)=-\dfrac{4}{X^2+Y^2}(X,\ Y)$

つまり　$x=-\dfrac{\mathbf{4}X}{X^2+Y^2}$，$y=-\dfrac{\mathbf{4}Y}{X^2+Y^2}$

(2)　(i)　点 A が直線 $y=-2x-2$ 上にあるから

$$-\frac{4Y}{X^2+Y^2}=\frac{8X}{X^2+Y^2}-2$$

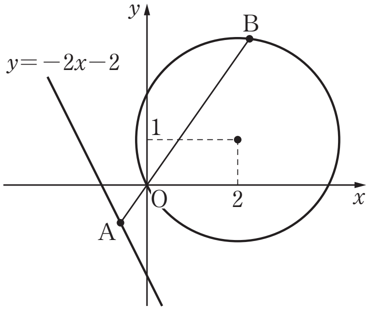
$X^2+Y^2-4X-2Y=0$　かつ　$X^2+Y^2\neq 0$

$(X-2)^2+(Y-1)^2=5$　かつ　$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$

よって，点 B の軌跡は

円 $(x-\mathbf{2})^2+(y-\mathbf{1})^2=\mathbf{5}$　ただし，原点を除く．

(ii)　OA・OB＝4 より



$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA}+\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}+\mathrm{OB}^2}$$

$$=\frac{4}{4+\mathrm{OB}^2}$$

$\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}}$ が最小となるのは OB^2 が最大となるとき，

すなわち OB が最大となるときである．

(i)より，点 B は円 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 上の原点を除く部分を動くから，OB が最大になるのは，OB が円の直径となるときで，このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2(2,\ 1)=(4,\ 2)$

(1)より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(-\dfrac{4\cdot4}{4^2+2^2},\ -\dfrac{4\cdot2}{4^2+2^2}\right)=\left(-\dfrac{4}{5},\ -\dfrac{2}{5}\right)$

よって，点 A の座標は　$\left(-\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}},\ -\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)$

第 45 講　総合問題⒀

2 つの箱 A，B があり，どちらの箱にも赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている．それぞれの箱から，無作為に玉を 1 個取り出し，取り出した玉を交換して箱に戻す操作を繰り返す．n 回の操作の後，箱 A，B のどちらにも赤玉，白玉が 1 個ずつ入っている確率を p_n とする．ただし，n を自然数とする．

(1)　$p_1=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$p_2=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

(2)　p_n と p_{n+1} の間に $p_{n+1}=\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}p_n+\boxed{ク}$ という関係が成り立つ．

よって，$p_n=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\left\{\boxed{サ}+\left(\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}\right)^n\right\}$ である．

解答例

(1)　1 回の操作の後，箱 A，B に赤玉と白玉が 1 個ずつ入っているという事象を X，そうでない事象を $\overline{X}$ とする．

p_1 は，1 回の操作で X が起こる確率であり，それは A，B から同じ玉を取り出す場合である．よって　$p_1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

次に，p_2 を求める．ここで，1 回の操作後に X が起こったとき，2 回目の操作で箱 A，B に赤玉と白玉が 1 個ずつ入った状態になる確率は $\dfrac{1}{2}$，1 回の操作後に $\overline{X}$ が起こったとき，2 回目の操作で箱 A，B に赤玉と白玉が 1 個ずつ入った状態になる確率は 1 である．

よって　$p_2=p_1\times\dfrac{1}{2}+(1-p_1)\times 1=-\dfrac{1}{2}p_1+1=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+1=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

(2)　(1)と同様に考えると

$$p_{n+1}=p_n\times\frac{1}{2}+(1-p_n)\times 1=\boldsymbol{\frac{-1}{2}}p_n+\boldsymbol{1}$$

変形すると　$p_{n+1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{2}{3}\right)$

数列 $\left\{p_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ は，初項 $p_1-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$p_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\left\{\boldsymbol{2}+\left(\boldsymbol{\frac{-1}{2}}\right)^n\right\}$$

第46講　総合問題⒁

$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$ かつ $4 \leqq xy \leqq 32$ とする．$\log_2 x = X$，$\log_2 y = Y$ とおくと

(1)　X のとり得る値の範囲は［ア］$\leqq X \leqq$［イ］である．

(2)　$k = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y$ とおくと，k のとり得る値の範囲は［ウ］$\leqq k \leqq$［エ］である．

解答例

(1)　$x \geqq 1$，$y \geqq 1$，$4 \leqq xy \leqq 32$ より

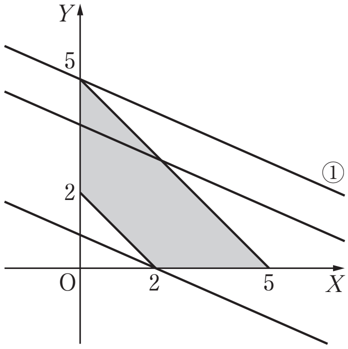
$\log_2 x \geqq 0$，$\log_2 y \geqq 0$，

$\log_2 4 \leqq \log_2 xy \leqq \log_2 32$　　$2 \leqq \log_2 x + \log_2 y \leqq 5$

すなわち　$X \geqq 0$，$Y \geqq 0$，$2 \leqq X + Y \leqq 5$

この連立不等式の表す領域を D とすると，

D は，右図の影のついた部分(境界含む)．



よって，X のとり得る値の範囲は　**$0 \leqq X \leqq 5$**

(2)　$k = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y = \dfrac{1}{2}\log_2 x + \log_2 y$

$= \dfrac{1}{2}X + Y$

だから，$Y = -\dfrac{1}{2}X + k$　……①

①の表す直線が，領域 D と共有点をもつ場合の

k のとり得る値の範囲を求める．

①が点 $(0,\ 5)$ を通るとき，k は最大で，このとき　$k = 5$

①が点 $(2,\ 0)$ を通るとき，k は最小で，このとき　$k = 1$

k はこの2つの値の間の値をとり得るから，k のとり得る値の範囲は

$1 \leqq k \leqq 5$

第 47 講　総合問題⒂

xy 平面における 2 つの放物線 $C：y=(x-a)^2+b$，$D：y=-x^2$ を考える．

(1)　C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるとき，実数 a，b の満たす条件は $b=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}a^2-\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である．

(2)　実数 a，b が(1)の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線の式は，$\boxed{カ}ax+\boxed{キ}y-a^2-b=0$ であり，この直線が通過する範囲は，

放物線 $y=\boxed{ク}x^2-\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ の $\boxed{サ}$ である．ただし，境界を含む．

$\boxed{サ}$ は，①，②のうち適するものを選べ．

①　上方　　　　②　下方

解答例

(1)　C と D の式から y を消去すると

$$(x-a)^2+b=-x^2 \qquad 2x^2-2ax+a^2+b=0 \quad \cdots\cdots①$$

C と D が異なる 2 点で交わるから，①の判別式を D_1 とすると

$$\frac{D_1}{4}=a^2-2(a^2+b)>0 \qquad よって \quad b<-\frac{a^2}{2} \quad \cdots\cdots②$$

①の 2 つの実数解を α，β とすると，$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=\dfrac{a^2+b}{2}$

2 つの解の差が 1 だから，$|\alpha-\beta|=1$ より　$(\alpha-\beta)^2=1$

$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2-4\cdot\dfrac{a^2+b}{2}=-a^2-2b$ であるから

$-a^2-2b=1$

よって　$b=\mathbf{\dfrac{-1}{2}}a^2-\mathbf{\dfrac{1}{2}}$　$\cdots\cdots(*)$　（これを満たす a，b は②も満たす）

(2)　C と D の 2 交点を通る図形は，k を定数として　$y-(x-a)^2-b+k(y+x^2)=0$

すなわち，$(k-1)x^2+2ax+(k+1)y-a^2-b=0$ と表される．

これが直線になるのは $k=1$ のときであり，このときの直線の式は

$$\mathbf{2}ax+\mathbf{2}y-a^2-b=0 \quad \cdots\cdots③$$

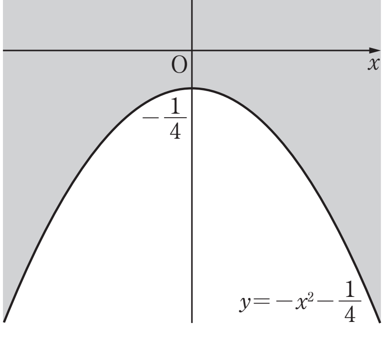
③が，C と D の 2 交点を通る直線の方程式となる．

$(*)$ を代入すると　$2ax+2y-a^2+\left(\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}\right)=0$

a について整理すると　$a^2-4xa-(4y+1)=0$

a は実数であるから，判別式を D_2 とすると

$$\frac{D_2}{4}=4x^2+(4y+1)\geqq 0 \qquad y\geqq -x^2-\frac{1}{4}$$



よって，直線③が通過する範囲は，

放物線 $y=\mathbf{-}x^2-\mathbf{\dfrac{1}{4}}$ の上方(①)である．ただし，境界を含む．

第48講　総合問題(16)

関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)\,dt$ を満たすとし，$\int_0^2 f(t)\,dt=a$ とおく．

(1)　$f(2)=$ ア $a+$ イ である．

(2)　$a=$ ウエ である．

(3)　k は定数とする．$y=xf(x)-k$ と $y=ax^2$ のグラフの共有点の個数は次のようになる．

$k<$ オ ，$\dfrac{カ}{キ}<k$ のとき，ク 個

$k=$ オ ，$\dfrac{カ}{キ}$ のとき，ケ 個

オ $<k<\dfrac{カ}{キ}$ のとき，コ 個

解答例

$f(x)=|x-1|+x\int_0^2 f(t)\,dt=|x-1|+ax$

(1)　$f(2)=\mathbf{2a+1}$

(2)　$x\leqq 1$ のとき，$f(x)=(a-1)x+1$　　$x\geqq 1$ のとき，$f(x)=(a+1)x-1$

$a=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^2 f(t)\,dt=\int_0^1\{(a-1)t+1\}\,dt+\int_1^2\{(a+1)t-1\}\,dt$

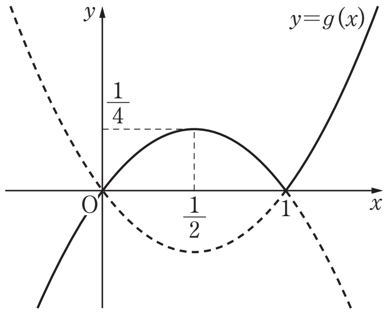
$=\left[\frac{1}{2}(a-1)t^2+t\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}(a+1)t^2-t\right]_1^2=\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}\right)=2a+1$

$a=2a+1$ より　$a=\mathbf{-1}$

(3)　$y=xf(x)-k$ と $y=-x^2$ のグラフの共有点の個数は，$xf(x)-k=-x^2$，
すなわち $xf(x)+x^2=k$ の実数解の個数に等しい．$g(x)=xf(x)+x^2$ とすると

$x\leqq 1$ のとき　$g(x)=(-2x^2+x)+x^2=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

$1\leqq x$ のとき　$g(x)=-x+x^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$



$y=g(x)$ のグラフは右図．

このグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数を調べると，

$k<\mathbf{0}$，$\mathbf{\frac{1}{4}}<k$ のとき，**1** 個

$k=0$，$\frac{1}{4}$ のとき，**2** 個

$0<k<\frac{1}{4}$ のとき，**3** 個